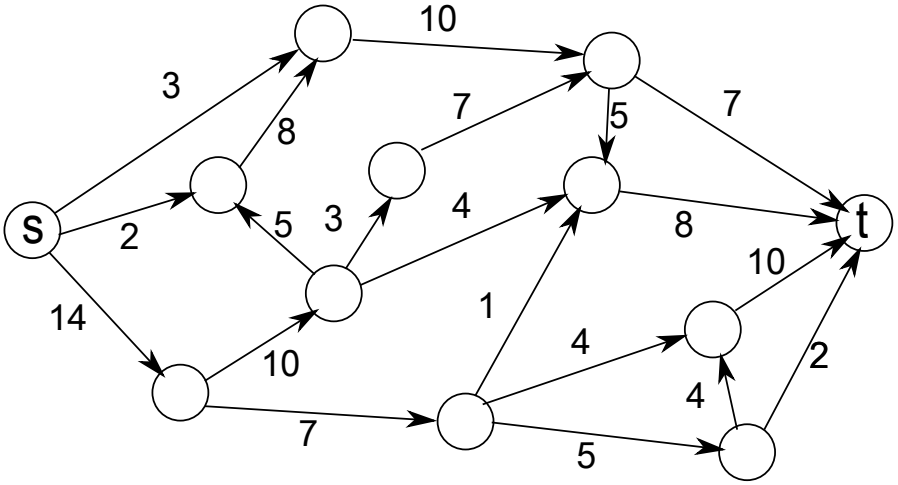
01204512: การบ้าน 2

กำหนดส่ง 22 ต.ค. 2555

1. หา maximum flow ของกราฟต่อไปนี้จากโหนด s ไปหา t ให้ระบุค่า flow function บนเส้นเชื่อมทุกเส้น ระบุขนาดของ maximum flow (ให้วงกลมไว้ด้วย) และระบุ minimum st-cut ให้ชัดเจน (ขีดเป็นเส้นก็เพียงพอ)



2. ทิ้งของเสีย
โรงงาน n โรงงาน ต้องการทิ้งของเสียไปยังโรงบำบัดของเสีย โรงงานที่ i มีพิกัดอยู่ที่ตำแหน่ง (x_i, y_i) โรงบำบัดของเสีย มีทั้งสิ้น k โรง โรงที่ j อยู่ที่พิกัด (a_j, b_j) บนระนาบ และรองรับของเสียได้ไม่เกิน c_j โรงงาน

ในการทิ้งของเสียนั้นโรงงานจะต้องขนของเสียไปทิ้ง เพื่อป้องกันมลภาวะ ทางการได้ออกกฎหมายว่าโรงงานกับโรงบำบัดของเสีย จะต้องห่างกันไม่เกิน D หน่วย

ให้ออกแบบอัลกอริทึมเพื่อตรวจสอบว่าจะสามารถจัดการเลือกโรงบำบัดของเสียให้กับโรงงาน โรงงานละหนึ่งโรงบำบัดน้ำเสีย โดยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น ให้วิเคราะห์เวลาการทำงานด้วย

3. จัดกลุ่มเอกสาร

ให้เอกสาร m ฉบับ เรามีข้อมูลความคล้ายของเอกสารเหล่านี้ กล่าวคือ สำหรับเอกสารฉบับที่ i และ j มีค่า $d(i,j)$ ที่แทนระดับความคล้ายของเอกสารสองฉบับนี้ ค่าดังกล่าวยิ่งมาก จะยิ่งถึงว่าคล้ายกันมาก เราต้องการจัดเอกสารเป็นกลุ่ม ๆ ไม่เกิน k กลุ่ม โดยที่รับประกันว่าเอกสารในกลุ่มจะมีความคล้ายกัน เราจะนิยามอย่างเป็นทางการดังนี้

ปัญหาการจัดกลุ่มเอกสาร. ให้จำนวนเต็ม m แทนจำนวนเอกสาร, สำหรับเอกสาร i และ j ใด ๆ ให้ $d(i,j)$ เป็นจำนวนจริง แทนความคล้ายของเอกสาร, ให้จำนวนจริง D, และจำนวนเต็ม k เราต้องการทราบว่าสามารถที่จะ

- แบ่งเอกสารเป็นกลุ่มไม่เกิน k กลุ่ม นั่นคือ มีเซต $A_1, A_2, \ldots, A_p$ โดยที่ $p \leq k$ และ $\bigcup A_i = \{1, \ldots, m\}$ และ
- ถ้าเอกสารสองฉบับ i และ j อยู่ ในกลุ่มเดียวกัน (กล่าวคือมีเซต A_f ที่ $i \in A_f$ และ $j \in A_f$) เอกสารทั้งสองต้องคล้ายกันมากกว่าระดับ D นั่นคือ $d(i,j) \geq D$.

ได้หรือไม่?

จงแสดงว่าปัญหาการจัดกลุ่มเอกสาร เป็นปัญหา NP-Complete

(*คำใบ้.* ลดรูปจาก vertex cover)

4. ในการแข่งขันเกมหนึ่ง ต้องใช้ผู้เล่น k คน โดยผู้เล่นนี้จะเลือกจากผู้สมัครจำนวน n คน ทางผู้จัดงานจะไปตรวจสอบผู้สมัครทุกคน และเก็บข้อมูลว่าสำหรับคู่ของผู้สมัคร i และ j ใด ๆ มีความรู้จักกันใน

ระดับใด เราจะให้ c_{ij} แทนระดับของการรู้จักกันของผู้สมัคร i และ j โดยที่ $c_{ij} = 0$ ถ้า i ไม่รู้จักกับ j, $c_{ij} = 1$ ถ้า i รู้จักกับ j ในระดับเฉย ๆ, และ $c_{ij} = 2$ ถ้า i รู้จัก j ในระดับที่จะช่วยเหลือกันระหว่างเล่นเกม

เงื่อนไขในการเลือกผู้เล่น k คนเพื่อมาเล่นเกมคือ สำหรับผู้เล่นสองคนใด ๆ ที่ถูกเลือก จะต้องรู้จักกันในระดับเฉย ๆ หรือไม่รู้จักกัน (นั่นคือ ถ้า i และ j จะถูกเลือกทั้งคู่ $c_{ij} \leq 1$

เรียกปัญหาดังกล่าวว่า ``ปัญหาจัดหาคนเล่นเกม" จงพิสูจน์ว่าปัญหาดังกล่าวเป็นปัญหา NP-Complete.

5. <u>อัตราแลกเปลี่ยน</u>

วันดีคืนดีคุณอยากริเป็นคนค้าขายเงินขึ้นมา คุณไปกักตุนเงินตราต่างประเทศมารวม n สกุล เราจะเรียกเงินตราที่มีว่าเป็นเงินสกุล 1, 2, จนถึงสกุล n คุณกำลังจะเปิดร้านแล้ว แต่มีสิ่งที่คุณพลาดไม่ได้จัดหาคือ อัตราแลกเปลี่ยน!

โชคยังดีที่มีบริษัทรับจัดหาอัตราแลกเปลี่ยน โดยบริษัทนี้จะขายอัตราแลกเปลี่ยนให้คุณ บริษัทมีเซต E ของคู่ลำดับ (i, j) ที่ระบุว่าบริษัททราบอัตราแลกเปลี่ยนระหว่างเงินสกุล i และเงินสกุล j สำหรับอัตราแลกเปลี่ยนของคู่เงิน $(i, j) \in E$, บริษัทจะขายคุณในราคา $c(i, j)$ บาท

ในการซื้อขายเงิน ถ้าลูกค้าต้องการซื้อเงินตราสกุล s จากสกุล t นั้น คุณไม่จำเป็นต้องทราบอัตราแลกเปลี่ยนโดยตรงระหว่างสกุล s และ t เพราะคุณสามารถคิดอัตราแลกเปลี่ยนผ่านทางเงินสกุลอื่น ๆ ได้ กล่าวคือ ถ้าคุณมีเงินสกุล $v_1, v_2, \ldots, v_k$ สำหรับบาง k และคุณทราบอัตราแลกเปลี่ยนระหว่างสกุล s กับบางสกุล v_1, และสำหรับทุก ๆ $i < k$ อัตราแลกเปลี่ยนระหว่างสกุล v_i กับสกุล v_{i+1}, และอัตราแลกเปลี่ยนระหว่างสกุล v_k กับสกุล t คุณก็สามารถคำนวณอัตราแลกเปลี่ยนระหว่างเงินสกุล s และ t ได้

จงอธิบายอัลกอริทึมในการคำนวณหาว่าจะต้องซื้ออัตราแลกเปลี่ยนระหว่างเงินสกุลใดบ้าง ที่รับประกันว่าคุณสามารถซื้อขายเงินตราได้ระหว่างทุกคู่เงิน และมีค่าใช้จ่ายในการซื้ออัตราแลกเปลี่ยนรวมน้อยที่สุด (3 คะแนน) อธิบายให้ชัดเจนว่าทำไมวิธีที่เสนอมาถึงถูกต้อง (4 คะแนน) พร้อมวิเคราะห์เวลาการทำงาน (3 คะแนน)

6. <u>เดินทางเที่ยว</u>

ให้เซตของเมือง V ที่ประกอบด้วยเมืองจำนวน n เมือง ในนั้นมีเมือง $s \in V$ ที่เป็นเมืองต้นทาง, เมือง $t \in V$ ที่เป็นเมืองปลายทาง

เรามีข้อมูลของถนนเป็นเซต E ที่ประกอบด้วยคู่ลำดับ (u, v) ที่ระบุว่ามีถนนเดินทางเดียวจากเมือง u ไปเมือง v และข้อมูลระยะทาง $c : E \to \mathcal{R}$ นั่นคือ $c(u, v)$ ระบุระยะทางบนถนนจากเมือง u ไปเมือง v เราให้ $m = |E|$

เราต้องการเดินทางจากเมือง s ไปเมือง t โดยใช้ระยะทางรวมน้อยที่สุด อย่างไรก็ตาม เนื่องจากการเดินทางเป็นระยะเวลานาน ๆ โดยไม่พักทำให้ร่างกายอ่อนล้า เราจึงไปค้นข้อมูลเกี่ยวกับสถานที่ท่องเที่ยว เรามีเซต $T \subseteq V$ ของเมืองที่น่าไปเที่ยวและแวะระหว่างทาง ให้ k แทนขนาดของเซต T (นั่นคือ $k = |T|$)

(a) (2 คะแนน) ถ้าเราไม่สนใจเมืองท่องเที่ยวแต่ต้องการหาเส้นทางที่มีระยะทางสั้นที่สุด เราจะแก้ปัญหานี้อย่างไร?

(b) (5 คะแนน) ถ้าเราต้องการจะแวะที่เมืองในเซต T อย่างน้อย 1 เมือง ให้ออกแบบอัลกอริทึมสำหรับหาเส้นทางที่ใช้ระยะทางรวมน้อยที่สุดจากเมือง s ไปยังเมือง t ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว (3 คะแนน) พร้อมทั้งวิเคราะห์เวลาการทำงาน (2 คะแนน)

(c) (3 คะแนน) ถ้าเราต้องการจะแวะที่เมืองในเซต T อย่างน้อย 3 เมือง ให้ออกแบบอัลกอริทึมและวิเคราะห์การทำงาน

7. <u>เดินทางไกล</u>

โรงเรียนประถมแห่งหนึ่งมีนักเรียนจำนวนมาก ในวันอาทิตย์นี้มีการจัดค่ายลูกเสือ-เนตรนารี-ยุวกาชาติ นักเรียนทั้งหมดถูกแบ่งเป็นกลุ่ม ๆ จำนวน k กลุ่ม และต้องการจะเดินทางไกลจากโรงเรียน ไปยังสวนสัตว์เปิดเขาเขียว ซึ่งอยู่ไกลถึง 100 กิโลเมตร

ในการวางแผนการเดินทางนี้ คุณครูมีแผนที่อยู่ชุดหนึ่ง ในแผนที่ระบุแยก (ทั้งสามแยก-สี่แยก) จำนวน n แยก ให้ V แทนเซตของแยกเหล่านี้ โรงเรียนตั้งอยู่ที่แยก $s \in V$ และสวนสัตว์อยู่ที่แยก $t \in V$ นอกจากนี้ แผนที่ยังระบุถนนแบบทางเดียวที่เชื่อมระหว่างแยกเหล่านี้อีก m เส้น โดยระบุเป็นเซต E ของคู่ลำดับของแยก

เนื่องจากนักเรียนเวลาอยู่เป็นกลุ่ม จะส่งเสียงโวยวาย เป็นที่น่ารำคาญต่อคนสองข้างทางริมถนนมาก และการให้นักเรียนเดินผ่านถนนนั้นหลาย ๆ กลุ่มมากเกินไป จะทำให้เกิดปัญหาได้ ดังนั้นทางโรงเรียนจึงตั้งเงื่อนไขว่า จะไม่ให้กลุ่มลูกเสือ-เนตรนารี-ยุวกาชาติเดินผ่านถนนที่มีคนอยู่ริมทาง ถนนใดมากกว่า 2 กลุ่ม ส่วนถนนที่เป็นที่รกร้างนั้น จะเดินผ่านกี่กลุ่มก็ได้ เราให้เซต $D \subseteq E$ แทนถนนที่มีคนอาศัยอยู่

ทางโรงเรียนต้องการทราบว่า จะสามารถวางแผนหาเส้นทางให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเดินจากโรงเรียน ไปยังสวนสัตว์ได้ตามเงื่อนไขดังกล่าวได้หรือไม่

ให้ออกแบบอัลกอริทึมในการตรวจสอบดังกล่าว (6 คะแนน) พร้อมทั้งวิเคราะห์เวลาการทำงาน (4 คะแนน)

8. โยนแบบสุ่ม

ในข้อนี้เราจะพิจารณาการใช้ฟังก์ชัน hash แบบสุ่ม โดยพิจารณาจากการทดลองการโยนลูกบอลลงถัง

เรามีถัง n ถังและลูกบอล m ลูก โยนลูกบอลแต่ละลูกลงไปในถังแบบสุ่ม

- พิจารณาลูกบอลลูกที่ i กับลูกที่ j (ที่เป็นคนละลูกกัน) จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกบอลทั้งสองจะหล่นลงถังเดียวกัน
- สำหรับ $i \neq j$, ให้ตัวแปรสุ่ม X_{ij} เป็น 1 ถ้าลูกบอลลูกที่ i หล่นลงถังเดียวกับลูกบอลลูกที่ j และมีค่าเป็น 0 ในกรณีอื่น ๆ
  จงคำนวณหาค่าคาดหวัง E$[X_{ij}]$
  (hint: นิยามของค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม A คือ $E[A] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i \cdot \Pr[A = i]$)
- ให้ตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนคู่ของลูกบอลที่หล่นลงถังเดียวกัน จงคำนวณหา E$[X]$
- ตัวแปร n ต้องมีค่าเป็นเท่าใด ถึงจะทำให้ E$[X] = 1$ (ให้ตอบแบบ asymptotic นั่นคือตอบเป็น Θ หรือ Ω)
- เพื่อนของคุณกำลังพัฒนาโปรแกรมสำหรับทดสอบว่า URL ที่ได้รับมานั้นตรงกับ URL ที่อยู่ในรายการหรือไม่ โดยเพื่อนของคุณใช้การ hash URL ให้เป็นจำนวนเต็มแล้วเก็บใน hash table ถ้าเขามี URL ประมาณ 10000 URL ถ้าเขาไม่ต้องการจัดการกับการที่ URL จะถูก hash มาชนกันเลย คุณจะแนะนำให้เขาใช้ hash table ที่มีประมาณกี่ช่อง เพราะว่าอะไร?