บทที่ 1
ภาษาของคณิตศาสตร์ I
ตรรกศาสตร์

ในสังคมมนุษย์ เราใช้ภาษาต่างๆ ในการติดต่อสื่อสารระหว่างกันทั้งโดยการพูดและการเขียน. ภาษาอันหลากหลายที่มนุษย์พัฒนาขึ้นเหล่านี้ ไม่เพียงแต่ใช้สื่อความหมายในเชิงความคิดเท่านั้น แต่ยังใช้สื่ออารมณ์ความรู้สึกด้วย เช่นในภาษาไทย เรามีทั้งคำกล่าวอย่างตรงไปตรงมาว่า "เธอเป็นคนขี้โม้" ทั้งคำกระแทกอย่าง "ถ้าเธอไม่ได้โม้สักหน่อย คงจะอกแตกตายกระมัง" ไปจนถึงคำแดกดันอย่าง "รู้สึกว่าเธอจะไม่ค่อยขี้โม้เลยนะ" เราจะเห็นว่า ข้อความทั้งสามต้องการจะสื่อความหมายเดียวกัน แต่กลับให้สีสันทางอารมณ์ความรู้สึกที่แตกต่างกัน. และที่น่าสนใจก็คือ ข้อความที่สามกลับสื่อความหมายตรงข้ามกับตัวมันเองอย่างสิ้นเชิง.

ในโลกของคณิตศาสตร์ ก็ต้องมีภาษาไว้ใช้ในการสื่อความหมายเช่นกัน หากแต่ภาษาที่ใช้แสดงข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ จะต้องให้ความหมายที่ชัดเจน แม่นยำ และปราศจากความกำกวมโดยสิ้นเชิง. ข้อความทางคณิตศาสตร์จะต้องมีความจริงความเท็จที่แน่นอน ทั้งยังปราศจากเรื่องของ "อารมณ์ความรู้สึก" และ "กาลเวลา" มาเจือปนในความหมาย. นอกจากนี้ คำเชื่อมข้อความต่างๆ เช่น และ หรือ ถ้า แล้ว ฯลฯ ก็จะต้องมีความหมายที่ชัดเจนแน่นอน เพื่อใช้แสดงความสัมพันธ์เชิงเหตุผลของข้อความโดยปราศจากความกำกวม.

ด้วยเหตุที่ลักษณะการใช้ภาษาในสังคมทั่วไป ยังมีความแตกต่างจากการใช้ภาษาในโลกของคณิตศาสตร์ดังกล่าว ภาษาที่ใช้ในชีวิตประจำวันจึงมีความชัดเจนแม่นยำไม่เพียงพอที่จะนำมาใช้สื่อความหมายและแสดงเหตุผลทางคณิตศาสตร์. นักคณิตศาสตร์จึงต้องมีข้อกำหนดที่ตรงกันในเรื่องของวิธีการแสดงข้อเท็จจริง วิธีการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อความ และกลไกของการให้เหตุผล เพื่อนำมาใช้สื่อความหมายได้อย่างชัดเจนไม่กำกวม. สาขาของคณิตศาสตร์ที่ว่าด้วยวิธีการแสดงข้อเท็จจริงและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์นี้ เรียกว่า **ตรรกศาสตร์** (logic) ซึ่งจะเป็นหัวข้อบรรยายในบทนี้.

นอกจากจะเป็นพื้นฐานสำคัญของการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์แล้ว ตรรกศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานสำคัญในศาสตร์ทางด้านคอมพิวเตอร์อีกด้วย. การออกแบบฮาร์ดแวร์คอมพิวเตอร์ การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ การออกแบบภาษาคอมพิวเตอร์ การจัดการฐานข้อมูล ตลอดไปจนถึงเรื่องของปัญญาประดิษฐ์ (artificial intelligence) ล้วนเป็นการประยุกต์ความรู้ทางตรรกศาสตร์ทั้งสิ้น.

1.1 ประพจน์และการเชื่อมประพจน์

ประพจน์และค่าความจริง

ในทางตรรกศาสตร์ เราเรียก *ข้อความซึ่งเป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น* ว่า **ประพจน์** (proposition). ข้อความใดก็ตามที่ไม่มีความจริงความเท็จที่แน่นอน เราไม่อาจนับว่าเป็นประพจน์.

ตัวอย่าง 1: ข้อความทุกข้อต่อไปนี้เป็นประพจน์ เพราะเหตุใด.

(1) เดือนกุมภาพันธ์ในปีค.ศ. 2000 มี 29 วัน

(2) ประเทศไทยมีพรมแดนติดกับประเทศอังกฤษ

(3) $20 < 10$

(4) จำนวนเฉพาะทุกตัวที่มากกว่า 2 เป็นเลขคี่

(5) เมื่อเวลาเที่ยงตรงของวันปีใหม่ พ.ศ. 2543 ตามเวลาประเทศไทย โลกมีจำนวนแมลงวันมากกว่าจำนวนยุง

ข้อความ (1) และ (4) เป็นข้อความที่เป็นความจริงอย่างแน่นอน จึงเป็นประพจน์. ข้อความ (2) และ (3) เป็นเท็จอย่างแน่นอน จึงเป็นประพจน์เช่นกัน. ส่วนข้อความ (5) นั้น ถึงแม้ว่าจะไม่มีใครทราบว่าจริงหรือเท็จ เพราะไม่มีปัญญาไปนับ แต่ก็เป็นข้อความที่เป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น (พระเจ้าย่อมรู้ว่าจริงหรือเท็จ แม้มนุษย์จะไม่รู้) ดังนั้นข้อความ (5) ก็นับว่าเป็นประพจน์ด้วยเช่นกัน.

❑

ข้อความ (5) ในตัวอย่าง 1 ข้างบน แสดงให้เห็นว่า ข้อความที่เป็นประพจน์นั้น เราอาจจะไม่ทราบว่ามันเป็นจริงหรือเท็จก็ได้. ขอเพียงกระจ่างชัดว่า ข้อความนั้นเป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งที่แน่นอน เราก็ถือว่าเป็นประพจน์.

ตัวอย่าง 2: ข้อความทุกข้อต่อไปนี้ไม่เป็นประพจน์ เพราะเหตุใด.

(1) $x+5 < 0$ -- *เราไม่รู้ว่า x ตัวไหน*

(2) ทำไม 5 จึงหาร 100 ลงตัว -- *ประโยคคำถาม ไม่มีความจริงเท็จ*

(3) 10 เป็นเลขคู่หรือไม่ -- *ประโยคคำถาม ไม่มีความจริงเท็จ*

(4) กรุณาถอดรองเท้า -- *คำขอร้อง ไม่มีความจริงเท็จ*

(5) คำว่ารักคงยังไม่พอ -- *ความจริงเท็จไม่แน่นอน ขึ้นกับแต่ละบุคคล*

(6) น้ำขึ้นให้รีบตัก -- *คำชี้แนะหรือคำสั่ง ไม่มีความจริงเท็จ*

❑

ประพจน์ทุกประพจน์จะมี**ค่าความจริง** (truth value) ของตัวมันเอง. ถ้าประพจน์ใดเป็นความจริง เรากล่าวว่า ประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็น**จริง** (true). ถ้าประพจน์ใดไม่เป็นความจริง เรากล่าวว่า ประพจน์นั้นมีค่าความจริงเป็น**เท็จ** (false). จากนิยามของประพจน์ แต่ละประพจน์จะมีค่าความจริงเพียงค่าเดียวเท่านั้น. ต่อไปเราจะใช้สัญลักษณ์ T แทนค่าจริง และใช้ F แทนค่า*เท็จ* และเราอาจใช้ตัวอักษร p, q, r, s, … แทนประพจน์ที่เรากำลังกล่าวถึง.

การเชื่อมประพจน์

เราอาจจะนำประพจน์หลายประพจน์มาเชื่อมกันด้วย**โอเปอเรเตอร์เชิงตรรก** (logical operator) แล้วได้ข้อความใหม่ที่ยังคงหาค่าความจริงได้ ดังนั้น ข้อความใหม่นี้ก็ยังคงเรียกได้ว่าเป็นประพจน์เช่นกัน. เราเรียกประพจน์ที่เกิดจากการนำเอาประพจน์ย่อยๆ ตั้งแต่หนึ่งประพจน์ขึ้นไป มาเชื่อมกันด้วยโอเปอเรเตอร์เชิงตรรกว่า **ประพจน์ประกอบ** (compound proposition). เราเรียกประพจน์ที่ถูกนำ

มาเชื่อมด้วยโอเปอเรเตอร์เชิงตรรกว่าเป็น *โอเปอแรนด์ (operand)* ของโอเปอเรเตอร์นั้น. โอเปอเรเตอร์เชิงตรรกที่ใช้กันทั่วไป ได้แก่ $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$ และ $\longleftrightarrow$ เป็นต้น ซึ่งจะกล่าวถึงความหมายต่อไป.

ตัวอย่าง 3: ถ้าให้ p, q, และ r แทนประพจน์, ประพจน์ต่อไปนี้ เป็นประพจน์ประกอบ:

(1) $\sim p$

(2) $p \longrightarrow q$

(3) $q \wedge ((p \vee q) \longleftrightarrow \sim r)$

ในประพจน์ประกอบ (1) p เป็นโอเปอแรนด์ของโอเปอเรเตอร์ $\sim$. ในประพจน์ประกอบ (2) ทั้ง p และ q เป็นโอเปอแรนด์ของโอเปอเรเตอร์ $\longrightarrow$. ในประพจน์ประกอบ (3) โอเปอแรนด์ของ $\wedge$ คือ ประพจน์ q และประพจน์ประกอบ $((p \vee q) \longleftrightarrow \sim r)$ ในขณะที่ โอเปอแรนด์ของ $\longleftrightarrow$ คือประพจน์ประกอบ $(p \vee q)$ และ $\sim r$.

❑

ต่อไปเราจะมาดูนิยามและความหมายของโอเปอเรเตอร์เชิงตรรกที่ใช้กันทั่วไปบางตัว. โอเปอเรเตอร์เหล่านี้ นักคณิตศาสตร์กำหนดขึ้นมาเพื่อให้ประพจน์ประกอบที่เกิดขึ้นสื่อความหมายที่ต้องการ. ตัวอย่างเช่น โอเปอเรเตอร์ $\longrightarrow$ ถูกนิยามขึ้นเพื่อให้ประพจน์ $p \longrightarrow q$ มีความหมายว่า *ความจริงของ p ทำให้เราสรุปได้ว่า q จริง* เป็นต้น.

นิเสธของประพจน์

ถ้าให้ p เป็นประพจน์ใดๆ เราเรียกประพจน์ $\sim p$ เรียกว่า **นิเสธของ p** (negation of p). เรานิยามโอเปอเรเตอร์ $\sim$ เพื่อต้องการให้ $\sim p$ มีความหมายว่า ***“p ไม่เป็นความจริง”*** หรือ ***“ไม่เป็นความจริงที่ว่า p”*** หรือ ***“p เป็นเท็จ”*** นั่นเอง.

ตัวอย่าง 4: ถ้าให้ p, q, และ r คือประพจน์ต่อไปนี้

p : พระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก

q : 12 น้อยกว่า 20

r : 15*2 = 30

เราจะได้นิเสธของประพจน์ทั้งสามคือประพจน์ดังต่อไปนี้

$\sim p$: ไม่เป็นความจริงที่ว่าพระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก

$\sim q$: 12 ไม่น้อยกว่า 20 *(หรือเขียนได้ว่า $12 \geq 20$ นั่นเอง)*

$\sim r$: $15*2 \neq 30$

❑

เนื่องจาก $\sim p$ มีความหมายว่า “p เป็นเท็จ” ดังกล่าว จะเห็นว่า ถ้า p เป็นจริง $\sim p$ ก็จะเป็นเท็จ (เพราะข้อความ “p เป็นเท็จ” ไม่เป็นความจริง) และถ้า p เป็นเท็จ $\sim p$ ก็จะเป็นจริง (เพราะข้อความ “p เป็นเท็จ” เป็นความจริง). ดังนั้น โดยสรุปแล้ว $\sim p$ จะมีค่าความจริงตรงข้ามกับ p เสมอ.

เราอาจแสดงความหมายของโอเปอเรเตอร์เชิงตรรกได้อีกแบบหนึ่งโดยใช้ **ตารางค่าความจริง** (truth table) ซึ่งแสดงค่าความจริงที่เป็นไปได้ทั้งหมดของประพจน์ที่เป็นโอเปอแรนด์และค่าความจริงของประพจน์ประกอบที่ได้เป็นผลลัพธ์. ตาราง 1 แสดงตารางค่าความจริงสำหรับโอเปอเรเตอร์ $\sim$.

ตาราง 1 : ตารางค่าความจริงของ $\sim p$

p	~p
T	F
F	T

ความจริงร่วมกันของสองประพจน์

โอเปอเรเตอร์เชิงตรรก $\wedge$ เป็นการแสดง**ความจริงร่วมกันของสองประพจน์** (conjunction of two propositions) กล่าวคือ ถ้าให้ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ, ประพจน์ประกอบ $p \wedge q$ จะมีความหมายว่า ***"ทั้ง p และ q เป็นความจริง".*** จากความหมายนี้ เราจะสรุปได้ว่า ข้อความนี้จะเป็นจริงเฉพาะเมื่อทั้ง p และ q เป็นจริงเท่านั้น. ถ้ามีตัวใดตัวหนึ่งหรือทั้งสองตัวเป็นเท็จ ข้อความนี้จะเป็นเท็จทันที. ดังนั้น เราสามารถแสดงนิยามของโอเปอเรเตอร์ $\wedge$ ด้วยตารางค่าความจริงดังตาราง 2.

ความหมายของประพจน์ประกอบ $p \wedge q$ ดังกล่าว ใกล้เคียงกับภาษาไทยว่า *"p และ q"* หรือภาษาอังกฤษว่า *"p and q"* ดังนั้น ต่อไปเราจะอนุโลมใช้คำสันธาน **และ** หรือ **and** แทนโอเปอเรเตอร์ $\wedge$. แต่ผู้อ่านควรทราบว่า ในภาษามนุษย์ย่อมมีวิธีพูดได้มากมายที่ให้ความหมายเดียวกัน เช่นถ้าให้ p แทนข้อความ "ดอกโสนบานเช้า" และ q แทนข้อความ "ดอกคัดเค้าบานเย็น", ข้อความต่อไปนี้ ล้วนมีความหมายตรงกับ $p \wedge q$ ทั้งสิ้น:

"ดอกโสนบานเช้าและดอกคัดเค้าบานเย็น"
"ดอกโสนบานเช้าแต่ดอกคัดเค้าบานเย็น"
"แม้ว่าดอกโสนจะบานเช้า แต่ดอกคัดเค้ากลับบานเย็น"

ตาราง 2 : ตารางค่าความจริงของ $p \wedge q$

p	q	p∧q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ความจริงของประพจน์ใดประพจน์หนึ่งจากสองประพจน์

โอเปอเรเตอร์เชิงตรรก $\vee$ เป็นการแสดง**ความจริงของประพจน์ใดประพจน์หนึ่งจากสองประพจน์** (disjunction of two propositions) กล่าวคือ ถ้าให้ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ เราต้องการให้

$p \vee q$ เป็นประพจน์ที่มีความหมายว่า *"p หรือ q หรือทั้งคู่เป็นความจริง"* นั่นคือ ถ้าตัวใดตัวหนึ่งหรือทั้งสองตัวเป็นจริง, $p \vee q$ จะเป็นจริง. $p \vee q$ จะเป็นเท็จได้ ก็ต่อเมื่อทั้ง p และ q เป็นเท็จทั้งคู่เท่านั้น. ดังนั้น เราสามารถแสดงนิยามของโอเปอเรเตอร์ $\vee$ ด้วยตารางค่าความจริงดังตาราง 3.

ตาราง 3 : ตารางค่าความจริงของ $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ตาราง 4 : ตารางค่าความจริงของ $p \oplus q$

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

โอเปอเรเตอร์เชิงตรรกอีกตัวหนึ่งที่มีความหมายคล้ายคลึงกับ $\vee$ แต่ไม่เหมือนกัน นั่นคือ โอเปอเรเตอร์ $\oplus$ ซึ่งเป็นการแสดง**ความจริงเพียงประพจน์เดียวจากสองประพจน์** (exclusive-or of two proposition) กล่าวคือ ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใดๆ $p \oplus q$ จะมีความหมายว่า ***"p หรือไม่ก็ q อย่างใดอย่างหนึ่งเป็นความจริง"*** นั่นคือ ประพจน์ $p \oplus q$ จะเป็นจริงเฉพาะในกรณีที่ p จริงแต่ q เท็จ และกรณีที่ p เท็จแต่ q จริง. ตารางค่าความจริงของโอเปอเรเตอร์ $\oplus$ แสดงในตาราง 4.

ความหมายของ $\vee$ ใกล้เคียงกับคำสันธาน *"หรือ"* ในภาษาไทย (หรือ *"or"* ในภาษาอังกฤษ) แต่อย่างไรก็ตาม คำว่า "หรือ" ที่ใช้กันทั่วไปยังมีความกำกวมอยู่ เพราะข้อความ "p หรือ q" ในภาษาไทยในบางบริบทก็มีความหมายเช่นเดียวกับ $p \vee q$ แต่ในบางบริบทกลับมีความหมายเช่นเดียวกับ $p \oplus q$. ตัวอย่างเช่น เมื่อได้ยินข้อความว่า "พนักงานทุกคนพูดภาษาอังกฤษหรือภาษาจีนได้" คนส่วนใหญ่จะตีความคำว่า*หรือ*ในประโยคนี้เหมือนโอเปอเรเตอร์ $\vee$ นั่นคือ อาจเป็นไปได้ว่ามีพนักงานบางคนพูดได้ทั้งสองภาษา. แต่เมื่อได้ยินข้อความว่า "ห้องพักนักกีฬาไทยแต่ละคนอยู่ที่ชั้นสองหรือชั้นสิบของตึกนี้" คนส่วนใหญ่จะตีความคำว่า*หรือ*ในประโยคนี้เหมือนโอเปอเรเตอร์ $\oplus$ เพราะเชื่อว่า ไม่น่าจะมีนักกีฬาไทยคนใดมีห้องพักอยู่ทั้งสองชั้น.

ด้วยเหตุนี้ เพื่อขจัดความกำกวม ในภาษาเขียนที่ค่อนข้างเป็นทางการเราจึงมักใช้คำว่า ***และ/หรือ*** หรือคำว่า ***หรือ....หรือทั้งสองอย่าง*** เมื่อต้องการให้มีความหมายเหมือน $\vee$ เช่น "พนักงานทุกคนพูดภาษาอังกฤษและ/หรือภาษาจีนได้" หรือ "พนักงานทุกคนพูดภาษาอังกฤษหรือภาษาจีนหรือทั้งสองภาษาได้" และใช้คำว่า ***หรือไม่ก็*** หรือคำว่า ***หรือ...อย่างใดอย่างหนึ่ง*** เมื่อต้องการให้มีความหมายเหมือน $\oplus$ เช่น "ห้องพักของนักกีฬาไทยแต่ละคนอยู่ที่ชั้นสองหรือไม่ก็ชั้นสิบ" หรือ "ห้องพักนักกีฬาไทยแต่ละคนอยู่ที่ชั้นสองหรือชั้นสิบชั้นใดชั้นหนึ่ง" เป็นต้น.

สำหรับหนังสือเล่มนี้ จะใช้คำว่า ***หรือ*** แทนความหมายของ $\vee$ และใช้คำว่า ***หรือไม่ก็*** แทนความหมายของ $\oplus$ ในการเขียนข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการความชัดเจน เช่นในบทนิยามและทฤษฎีบทต่างๆ.

เงื่อนไขที่เพียงพอและเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับประพจน์

นักคณิตศาสตร์นิยามโอเปอเรเตอร์เชิงตรรก $\longrightarrow$ ขึ้นเพื่อให้ประพจน์ประกอบ $p\longrightarrow q$ มีความหมายว่า ***"ความจริงของ p เพียงพอที่จะสรุปได้ว่า q จริง"*** หรือกล่าวให้ฟังง่ายขึ้นว่า ***"ถ้าหาก p จริงแล้ว เราสรุปได้ว่า q ต้องจริงแน่นอน."*** ควรเข้าใจว่า เรามิได้หมายความว่า p ต้องเป็นจริงหรือ q ต้องเป็นจริงแต่อย่างใด เราเพียงแต่ต้องการจะรับประกันว่า *q เป็นจริงแน่นอนถ้า p เป็นจริง.*

จากความหมายดังกล่าวของ $p\longrightarrow q$ ตารางค่าความจริงสำหรับโอเปอเรเตอร์ $\longrightarrow$ ควรจะเป็นอย่างไร? ถ้าให้ p และ q เป็นประพจน์ใดๆ และมีผู้กล่าวอ้างว่า *"ถ้าหาก p จริงแล้ว เราสรุปได้ว่า q ต้องจริงแน่นอน"* (ซึ่งคือประพจน์ $p\longrightarrow q$) เราจะพิจารณาว่าคำกล่าวอ้างนี้เป็นจริงหรือเท็จในกรณีที่เป็นไปได้ 4 กรณีดังต่อไปนี้:

1. *กรณีที่ทั้ง p และ q เป็นจริง:* จะเห็นว่าเมื่อ p เป็นจริง ปรากฏว่า q ก็เป็นจริงด้วย เป็นการยืนยันคำกล่าวอ้างนี้โดยตรง แสดงว่า $p\longrightarrow q$ เป็นความจริง.
2. *กรณีที่ p เป็นจริงแต่ q เป็นเท็จ:* เป็นการหักล้างคำกล่าวอ้างนี้โดยสิ้นเชิง เพราะเมื่อ p เป็นจริง แต่ q กลับไม่จริงตามคำกล่าวอ้าง แสดงว่า $p\longrightarrow q$ เป็นเท็จ.
3. *กรณีที่ p เป็นเท็จแต่ q เป็นจริง:* กรณีนี้มิได้ทำให้คำกล่าวอ้างนี้เป็นเท็จแต่อย่างใด เพราะผู้กล่าวเพียงแต่ยืนยันว่า *q เป็นจริงแน่ถ้า p เป็นจริง* แต่มิได้รับประกันอะไรเลยเกี่ยวกับความจริงเท็จของ q ถ้า p เป็นเท็จ. ดังนั้น เมื่อ p เป็นเท็จ ไม่ว่า q จะเป็นจริงหรือเท็จ ผู้กล่าว $p\longrightarrow q$ ก็มิได้พูดเท็จแต่ประการใด. นั่นคือ $p\longrightarrow q$ ยังคงเป็นความจริง.
4. *กรณีที่ทั้ง p และ q เป็นเท็จ:* ด้วยเหตุผลเดียวกับกรณีที่สาม กรณีนี้ก็มิได้ทำให้ผู้กล่าวอ้างพูดเท็จ ดังนั้นคำกล่าวอ้าง $p\longrightarrow q$ นี้จึงยังคงเป็นความจริงเช่นกัน.

ผลของการพิจารณาทั้ง 4 กรณีข้างบน ทำให้เราได้ตารางค่าความจริงสำหรับ $p\longrightarrow q$ ดังตาราง 5.

ตาราง 5: ตารางค่าความจริงของ $p\longrightarrow q$

p	**q**	**$p\to q$**
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ตัวอย่าง 5: ถ้าให้ p แทนประพจน์ "กรรณิการ์เป็นแอร์โฮสเตส" และ q แทนประพจน์ "กรรณิการ์พูดภาษาอังกฤษได้" ประพจน์ประกอบ $p\longrightarrow q$ จะมีความหมายว่า *"ถ้าหากกรรณิการ์เป็นแอร์โฮสเตส เราจะสรุปได้ว่าเธอพูดภาษาอังกฤษได้."* จะเห็นว่า ความหมายของคำกล่าวนี้ เป็นเพียงการยืนยันว่า *กรรณิการ์จะต้องพูดภาษาอังกฤษได้แน่ถ้าหากเธอเป็นแอร์โฮสเตส* แต่ถ้าหากว่าในความเป็นจริงแล้วเธอไม่ได้เป็นแอร์โฮสเตส ก็มิได้รับประกันความสามารถในการพูดภาษาอังกฤษของเธอแต่อย่างใดทั้งสิ้น. ด้วยเหตุนี้ ถ้าเธอมิได้เป็นแอร์โฮสเตส ไม่ว่าเธอจะพูดภาษาอังกฤษได้หรือไม่ได้ คำกล่าว $p\longrightarrow q$ ก็มิได้เป็นคำเท็จแต่

อย่างใด. กรณีเดียวที่จะทำให้คำกล่าวนี้เท็จก็คือ เมื่อเธอเป็นแอร์โฮสเตสจริงแต่กลับพูดภาษาอังกฤษไม่ได้ (นั่นคือ เมื่อ p เป็นจริง แต่ q เป็นเท็จ) เพราะเป็นการหักล้างคำกล่าวอ้างนี้โดยสิ้นเชิง.
❑

เราอาจเรียกข้อความ p⟶q ได้อีกอย่างหนึ่งว่า ***"p เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ** (sufficient condition) **สำหรับ q"*** โดยใน p⟶q นี้ เราเรียกประพจน์ p ว่าเป็น **สมมติฐาน (hypothesis** หรือ **premise)** และเรียกประพจน์ q ว่าเป็น **ผลสรุป (conclusion** หรือ **consequence)**.

นอกจากนี้ ในคณิตศาสตร์ยังมีการใช้สำนวนอีกอย่างหนึ่งที่เกี่ยวข้องกัน นั่นคือข้อความที่ว่า ***"p เป็นเงื่อนไขที่จำเป็น** (necessary condition) **สำหรับ q"*** ซึ่งหมายความว่า *"q ไม่อาจจะเป็นจริงได้ ถ้าหาก p ไม่จริง"* (เป็นการแสดงว่า *ความจริงของ p มีความจำเป็นสำหรับความจริงของ q* นั่นเอง). ต่อไปเราจะใช้โอเปอเรเตอร์ » แทนตัวเชื่อม *"เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ"* ดังกล่าว.

ตัวอย่าง 6: ถ้าให้ p แทนประพจน์ "ศิรินทรามีอายุอย่างน้อย 20 ปี" และ q แทนประพจน์ "ศิรินทราเป็นพระภิกษุ" ประพจน์ประกอบ p»q จะมีความหมายว่า *"การที่ศิรินทรามีอายุอย่างน้อย 20 ปีเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการที่เธอเป็นพระภิกษุ"* หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ *"ศิรินทราไม่อาจเป็นพระภิกษุได้ ถ้าหากเธอมีอายุน้อยกว่า 20 ปี"*

ควรเข้าใจว่า ข้อความดังกล่าวเพียงแต่บอกว่า การมีอายุอย่างน้อย 20 ปีของเธอเป็นเพียงเงื่อนไขที่จำเป็นอย่างหนึ่งต่อการที่เธอจะเป็นพระภิกษุได้ แต่มิได้หมายความว่าเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ เพราะยังมีเงื่อนไขที่จำเป็นอื่นๆ อีกหลายอย่างที่จะทำให้ศิรินทราสามารถบวชเป็นพระภิกษุ เช่น เธอต้องเป็นมนุษย์ และเธอต้องเป็นเพศชาย เป็นต้น. การเป็นพระภิกษุนั้นจำเป็นจะต้องมีอายุอย่างน้อย 20 ปี แต่การมีอายุอย่างน้อย 20 ปีไม่เพียงพอที่จะเป็นพระภิกษุได้.
❑

เมื่อเราชัดเจนกับความหมายของประพจน์ประกอบ p»q แล้ว เราจะกำหนดตารางค่าความจริงสำหรับโอเปอเรเตอร์ » ได้โดยพิจารณาทั้ง 4 กรณีที่เป็นไปได้ของค่า p และ q เช่นเคย:

1. *กรณีที่ทั้ง p และ q เป็นจริง:* เป็นการยืนยันคำกล่าวอ้างที่ว่า "p จำเป็นสำหรับ q" เพราะเมื่อ q จริง p ก็จริงเช่นกัน ดังนั้นในกรณีนี้ p»q เป็นจริง.
2. *กรณีที่ p เป็นจริงแต่ q เป็นเท็จ:* การที่ p เป็นจริงแต่ q กลับเป็นเท็จ มิได้หักล้างคำกล่าวอ้างที่ว่า "p จำเป็นสำหรับ q" แต่ประการใด. เพราะถึงแม้ว่า p ซึ่งจะเป็นเงื่อนไขที่จำเป็นอย่างหนึ่งของ q เป็นจริง แต่ถ้าเงื่อนไขที่จำเป็นอื่นๆ ของ q ไม่จริง, q ก็ไม่อาจจะเป็นจริงได้. ดังนั้นในกรณีนี้ p»q เป็นจริง.
3. *กรณีที่ p เป็นเท็จแต่ q เป็นจริง:* การที่ q เป็นจริงได้ ทั้งๆ ที่ p เป็นเท็จนั้น ย่อมเป็นการหักล้างคำกล่าวอ้างที่ว่า "p จำเป็นสำหรับ q" โดยสิ้นเชิง เพราะเป็นการแสดงว่าความจริงของ p ไม่ได้จำเป็นสำหรับความจริงของ q แต่อย่างใด. ดังนั้นในกรณีนี้ p»q เป็นเท็จ.
4. *กรณีที่ทั้ง p และ q เป็นเท็จ:* เนื่องจาก p»q มีความหมายอีกนัยหนึ่งว่า *"ถ้าหาก p ไม่จริง, q ก็ไม่อาจจะเป็นจริงได้"*. กรณีนี้จึงเป็นการยืนยันข้อความนี้โดยตรง ดังนั้น p»q เป็นจริง.

จากการพิจารณาทั้ง 4 กรณีข้างบน ทำให้เราได้ตารางค่าความจริงสำหรับ p»q ดังตาราง 6 ซึ่งแสดงเปรียบเทียบกับค่าความจริงของ q⟶p.

ตาราง 6: ตารางค่าความจริงของโอเปอเรเตอร์ p»q

(เปรียบเทียบกับค่าความจริงของ p⟶q)

p	q	p»q	q→p
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

จากตาราง 6 เราจะเห็นว่าค่าความจริงของ p»q กับของ q⟶p เหมือนกันทุกกรณี. นี่ย่อมหมายความว่า ที่แท้แล้วประพจน์ประกอบทั้งสองมีความหมายเหมือนกันทุกประการ. นั่นคือ ข้อความที่ว่า ***"p เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ q"*** มีความหมายเดียวกับข้อความ ***"q เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ p"*** นั่นเอง. ด้วยเหตุนี้ เราจึงสามารถใช้ข้อความ "q⟶p" แทนข้อความ "p»q" ได้เสมอ.

กล่าวโดยสรุปคือ ข้อความ "**p⟶q**" มีความหมายทั้งสองนัยดังต่อไปนี้

1. p เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ q
2. q เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ p

ดังนั้น ต่อจากนี้เราก็ไม่จำเป็นต้องใช้โอเปอเรเตอร์ » อีกต่อไป.

ภาษาเขียนทางคณิตศาสตร์สำหรับข้อความ p⟶q นั้นมีมากมายหลายสำนวน. ตาราง 7 แสดงสำนวนต่างๆ ที่ใช้กันทั่วไปในวรรณกรรมทางคณิตศาสตร์ที่ผู้อ่านควรทราบ.

ตาราง 7: ภาษาเขียนทางคณิตศาสตร์ของ p⟶q

ภาษาไทย	ภาษาอังกฤษ
p เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ q	p is a sufficient condition for q
p เพียงพอสำหรับ q	p is sufficient for q
ถ้า p, แล้ว q (หรือ *ถ้า p, จะได้ q*)	if p, then q
q ถ้า p	q if p
q เมื่อ p	q whenever p
p ทำให้สรุปได้ว่า q	p implies q
q เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ p	q is a necessary condition for p
q จำเป็นสำหรับ p	q is necessary for p
p ต่อเมื่อ q	p only if q

นอกจากนี้ ในทางคณิตศาสตร์เรามีชื่อเรียกประพจน์บางตัวที่เกี่ยวข้องกับ p⟶q. เราเรียกประพจน์ **q⟶p** ว่าเป็น **คอนเวอร์ส** (converse) ของประพจน์ p⟶q และเรียก **~q⟶~p** ว่าเป็น **คอนทราโพสิทิฟ** (contrapositive) ของประพจน์ p⟶q.

เปรียบเทียบความหมายของ “ถ้า...แล้ว” ในภาษาคณิตศาสตร์, ภาษามนุษย์, และภาษาคอมพิวเตอร์

ดังที่กล่าวในหัวข้อที่แล้วว่า ในข้อเขียนทางคณิตศาสตร์ เรามักใช้ประโยค “ถ้า p, แล้ว q” แทนประพจน์ $p \longrightarrow q$ เช่นข้อความ “ถ้า -3 > 0, แล้ว $\sqrt{-3}$ เป็นจำนวนจริง” เป็นต้น.

ในขณะเดียวกันเราก็ใช้คำเชื่อม *“ถ้า...แล้ว”* ในภาษาที่ใช้ในชีวิตประจำวันเช่นกัน เช่นเราพูดว่า

“ถ้าเช้าวันนี้ฝนไม่ตก, ฉันจะไปเที่ยวทะเล”---(1)

เป็นการแสดงเงื่อนไขในการไปทะเลของเรา.

นอกจากนี้ ในภาษาคอมพิวเตอร์เราก็มีโครงสร้าง if-then เพื่อแสดงคำสั่งที่มีเงื่อนไข เช่นในโปรแกรมภาษาปาสคาล อาจมีคำสั่ง

if x < 0 **then** read(y) ---(2)

เพื่อให้ตรวจสอบว่า x < 0 จริงหรือไม่ ถ้าจริงก็ให้อ่านค่า y เป็นต้น.

คำถามที่น่าสนใจคือ การใช้ *ถ้า...แล้ว* ในภาษามนุษย์ปกติ และโครงสร้าง if-then ในภาษาคอมพิวเตอร์ดังกล่าว มีความหมายเหมือนกับ *ถ้า...แล้ว* ในภาษาคณิตศาสตร์หรือไม่?

คำตอบคือไม่ เพราะเราไม่อาจบอกได้ว่าข้อความ (1) และ (2) เป็นจริงหรือเป็นเท็จ ดังนั้นข้อความทั้งสองจึงไม่ได้เป็นประพจน์ หากแต่เป็นการแสดง**การกระทำแบบมีเงื่อนไข** (conditional action). การกระทำในข้อความ (1) คือ “ฉันจะไปทะเล” โดยมีเงื่อนไขคือ “เช้าวันนี้ฝนจะต้องไม่ตก” ส่วนการกระทำในข้อความ (2) คือ “read(y)” โดยมีเงื่อนไขคือ “x < 0” การกระทำแบบมีเงื่อนไขเป็นการแสดงว่า *“จะทำอะไรเมื่อเงื่อนไขนั้นเป็นจริง”* ถึงแม้ว่าประโยคที่เป็นเงื่อนไขอาจพอมองเป็นประพจน์ได้ แต่ประโยคแสดงการกระทำอย่าง “ฉันจะไปทะเล” หรือ “read(y)” นั้นไม่มีทางเป็นประพจน์ได้เพราะปราศจากค่าความจริงใดๆ ดังนั้นข้อความ (1) และ (2) โดยรวมจึงไม่อาจเป็นประพจน์.

ในทางตรงกันข้าม ข้อความ “ถ้า p, แล้ว q” ในภาษาคณิตศาสตร์ ซึ่งใช้แทนประพจน์ “$p \longrightarrow q$” นั้น ไม่ได้เป็นการแสดงการกระทำ q ด้วยเงื่อนไข p แต่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความจริงของ p และความจริงของ q ในลักษณะที่ว่า *ความจริงประพจน์ p จะทำให้เราสรุปได้ว่าประพจน์ q เป็นจริง* จึงเป็นการสื่อความหมายที่ไม่เหมือนกับการกระทำแบบมีเงื่อนไขในภาษามนุษย์และภาษาคอมพิวเตอร์ดังกล่าว.

อย่างไรก็ตาม ถ้าในภาษาปกติเราพูดว่า “ถ้า p แล้ว q” โดยที่ทั้ง p และ q เป็นข้อความที่หาค่าความจริงได้ (นั่นคือเป็นประพจน์) ข้อความดังกล่าวก็อาจจะยังคงมีความหมายไม่ตรงกับ $p \longrightarrow q$ ในคณิตศาสตร์เสียทีเดียว. ตัวอย่างเช่น ในบ่ายวันพุธวันหนึ่งเราอาจกล่าวว่า *“ถ้าวันนี้เป็นวันอาทิตย์แล้ว หนึ่งบวกหนึ่งเท่ากับสาม”* จะเห็นว่าภายในข้อความนี้ ทั้งประโยค “วันนี้เป็นวันอาทิตย์” และ “หนึ่งบวกหนึ่งเท่ากับสาม” ล้วนเป็นประพจน์ (ที่เป็นเท็จทั้งคู่). แต่แม่ค้าในตลาดที่ได้ยินคำกล่าวนี้จะบอกว่าเราพูดเลอะเทอะ ในขณะที่นักคณิตศาสตร์กลับบอกว่าเราพูดความจริง! เพราะเหตุใด?

ตัวอย่างนี้สะท้อนความแตกต่างอีกประการหนึ่งของประโยค “ถ้า p แล้ว q” ในภาษามนุษย์กับภาษาคณิตศาสตร์. ในภาษามนุษย์นั้น ข้อความนี้มีความหมายในเชิงเหตุผลแฝงอยู่ นั่นคือ *q เป็นผลที่เกิดจากเหตุ p* แต่ในภาษาคณิตศาสตร์นั้น ข้อความ $p \longrightarrow q$ มิได้หมายความว่า q จำเป็นต้องเป็นผลที่เกิดจากเหตุ p แต่อย่างใด เพราะ p และ q เป็นประพจน์อะไรก็ได้ที่อาจมิได้เกี่ยวข้องกันในเชิงเหตุผลเลย. การที่แม่ค้าในตลาดบอกว่าเราพูดเหลวไหลเป็นเพราะเธอคิดว่า ถ้าสมมุติวันนี้จะเป็นวันอาทิตย์จริง (เหตุ) หนึ่ง

บวกหนึ่งก็ไม่มีทางเท่ากับสามอยู่ดี (ผลไม่อาจเกิดจากเหตุดังกล่าว) ดังนั้นเธอจึงไม่อาจบอกว่าเราพูดความจริง. แต่นักคณิตศาสตร์บอกว่าเราพูดความจริง เพราะจะตีความข้อความนี้ตามความหมายของ p⟶q นั่นคือ ข้อความนี้ยืนยันแต่เพียงว่า 1+1=3 อย่างแน่นอนถ้าหากวันนี้เป็นวันอาทิตย์ แต่ไม่ได้ยืนยันอะไรทั้งสิ้นถ้าหากวันนี้ไม่ใช่วันอาทิตย์. ดังนั้น ในเมื่อวันนี้เป็นวันพุธไม่ใช่วันอาทิตย์ ไม่ว่า 1+1 จะเท่ากับ 3 หรือไม่ ก็ไม่ทำให้คำกล่าวนี้เป็นเท็จแต่อย่างใด.

เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ

โอเปอเรเตอร์เชิงตรรกอีกตัวหนึ่งซึ่งใช้กันอย่างแพร่หลายคือ ⟷. เรานิยามโอเปอเรเตอร์ตัวนี้ขึ้นเพื่อให้ประพจน์ประกอบ **p⟷q** มีความหมายว่า ***“ประพจน์ p มีค่าความจริงเหมือนกับประพจน์ q”*** นั่นคือ p⟷q จะเป็นจริงเมื่อทั้งสองประพจน์เป็นจริงทั้งคู่หรือเป็นเท็จทั้งคู่อย่างใดอย่างหนึ่ง แต่จะเป็นเท็จเมื่อประพจน์หนึ่งเป็นจริงแต่อีกประพจน์หนึ่งเป็นเท็จ. ด้วยความหมายง่ายๆ นี้ เราสามารถสร้างตารางค่าความจริงสำหรับ p⟷q ดังแสดงในตาราง 8.

ตาราง 8

ตารางค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$

p	**q**	**p↔q**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ตาราง 9

ตารางค่าความจริงของ $(p \to q) \wedge (q \to p)$

p	**q**	**(p→q)∧(q→p)**
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ตัวอย่าง 7: กำหนดให้ p, q, r, และ s แทนประพจน์ต่อไปนี้:

p : 1+1=2

q : หนึ่งสัปดาห์มีเจ็ดวัน

r : เกาะภูเก็ตอยู่ในอ่าวเม็กซิโก

s : 4 เป็นจำนวนเฉพาะ

จะเห็นว่าประพจน์ p⟷q เป็นจริง เพราะทั้ง p และ q มีค่าความจริงเป็นจริงเหมือนกัน และประพจน์ r⟷s ก็เป็นจริง เพราะทั้ง r และ s มีค่าความจริงเป็น*เท็จ*เหมือนกัน. ส่วนประพจน์ p⟷s เป็น*เท็จ* เพราะ p กับ s มีค่าความจริงต่างกัน.

ด้วยเหตุนี้ เราจึงกล่าวได้ว่า ข้อความ “1+1=2” สมมูลเชิงตรรกกับข้อความ “หนึ่งสัปดาห์มีเจ็ดวัน” แต่ไม่สมมูลเชิงตรรกกับข้อความ “4 เป็นจำนวนเฉพาะ”

❏

ตาราง 9 แสดงค่าความจริงของประพจน์ประกอบ (p⟶q)∧(q⟶p) ซึ่งเราพบว่าประพจน์ประกอบนี้มีค่าความจริงเหมือนกับ p⟷q ในทุกกรณี. นั่นย่อมหมายความว่าประพจน์ประกอบทั้งสองให้ความหมายเหมือนกันทุกประการ. ดังนั้น ความหมายของ p⟷q อีกนัยหนึ่งก็คือ ***“ถ้า p แล้ว q, และ ถ้า q แล้ว p”*** นั่นคือ ***p เป็นทั้งเงื่อนไขที่เพียงพอและเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ q***.

อนึ่ง ถ้าประพจน์ p ใดๆ มีค่าความจริงเหมือนกับประพจน์ q ใดๆ ผลที่ตามมาคือ ประพจน์ p และ q สามารถใช้แทนกันได้เมื่อนำไปเป็นโอเปอแรนด์ของโอเปอเรเตอร์เชิงตรรกใดๆ ดังนั้นเราจึงมีสำนวนสำหรับ $p \leftrightarrow q$ อีกอย่างหนึ่งว่า ***"p สมมูลกับ q"*** *(p is equivalent to q)*

โดยสรุปแล้ว เรามีภาษาเขียนทางคณิตศาสตร์ของ $p \leftrightarrow q$ ที่ใช้กันอย่างแพร่หลายดังแสดงในตาราง 10. เป็นที่น่าสังเกตว่า ***"p เมื่อและต่อเมื่อ q"*** (ซึ่งเป็นการเขียนโดยย่อของ *"p เมื่อ q และ p ต่อเมื่อ q"*) เป็นภาษาเขียนของ $p \leftrightarrow q$ ที่พบบ่อยที่สุดในวรรณกรรมทางคณิตศาสตร์.

ตาราง 10: ภาษาเขียนทางคณิตศาสตร์ของ $p \leftrightarrow q$

ภาษาไทย	ภาษาอังกฤษ
p เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับ q	p is a necessary and sufficient condition for q
p จำเป็นและเพียงพอสำหรับ q	p is necessary and sufficient for q
p เมื่อและต่อเมื่อ q	p if and only if q
p สมมูลกับ q	p is equivalent to q

สัจนิรันดร์และข้อขัดแย้ง

ประพจน์ประกอบบางประพจน์มีลักษณะพิเศษคือเป็นจริงเสมอหรือเป็นเท็จเสมอไม่ว่าประพจน์ย่อยภายในจะมีค่าความจริงเป็นเช่นไร. ตัวอย่างเช่น ในทุกกรณีของค่าความจริงของประพจน์ย่อย p และ q, ประพจน์ประกอบ $(p \wedge q) \rightarrow p$ จะมีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ และประพจน์ประกอบ $p \wedge \sim p$ จะมีค่าความจริงเป็นเท็จเสมอ. (ผู้อ่านควรตรวจสอบดูด้วยตนเองโดยใช้ตารางค่าความจริง). เรามีชื่อเฉพาะสำหรับประพจน์ประกอบพิเศษเหล่านี้ ดังในบทนิยามข้างล่าง.

บทนิยาม 1: เราเรียกประพจน์ประกอบที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอในทุกกรณีของค่าความจริงของประพจน์ย่อยที่อยู่ภายในว่า **สัจนิรันดร์** (tautology) และเรียกประพจน์ประกอบที่มีค่าความจริงเป็น*เท็จ*เสมอในทุกกรณีของค่าความจริงของประพจน์ย่อยที่อยู่ภายในว่า **ข้อขัดแย้ง** (contradiction).

สัญลักษณ์ : ต่อไปเราจะใช้สัญลักษณ์ $\mathcal{T}$ แทน*ประพจน์ใดๆ ที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ* (รวมทั้งสัจนิรันดร์) และสัญลักษณ์ $\mathcal{F}$ แทน*ประพจน์ใดๆ ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จเสมอ* (รวมทั้งข้อขัดแย้ง).

การทราบว่าประพจน์ใดเป็นสัจนิรันดร์หรือเป็นข้อขัดแย้งมีประโยชน์หลายอย่างตามมา ดังจะได้กล่าวต่อไป.

ตัวอย่าง 8: พิจารณาตารางค่าความจริงของประพจน์ประกอบ $(p \wedge q) \rightarrow p$, $p \wedge \sim p$, และ $p \rightarrow (p \vee q)$ ดังต่อไปนี้

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

p	~p	$p \wedge \neg p$
T	F	F
T	T	F

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

จะเห็นว่าในทุกกรณีของค่าความจริงของประพจน์ย่อย p และ q, ประพจน์ประกอบ $(p\wedge q)\longrightarrow p$ และ $p\longrightarrow (p\vee q)$ เป็นจริงเสมอ ดังนั้นประพจน์ทั้งสองจึงเป็นสัจนิรันดร์. ส่วนประพจน์ประกอบ $p\wedge\sim p$ เป็นข้อขัดแย้ง เพราะเป็นเท็จเสมอในทุกกรณีของค่า p. ❑

1.2 สมมูลเชิงตรรกและพีชคณิตของประพจน์

สมมูลเชิงตรรก

ในระบบคณิตศาสตร์หนึ่งๆ เราพูดถึง "ความเทียบเท่ากัน" ของสิ่งสองสิ่งในลักษณะที่ว่าทั้งสองสิ่งนั้นสามารถใช้แทนกันได้เมื่อเป็นโอเปอแรนด์ของโอเปอเรเตอร์ต่างๆ ในระบบนั้น. เราเรียกการเทียบเท่ากันแบบนี้ว่า**การสมมูลกัน** (equivalence) ของสิ่งสองสิ่งนั้น. ตัวอย่างเช่น ในระบบจำนวนจริง เราถือว่านิพจน์ $(x+y)^2$ *สมมูลกับ*นิพจน์ $x^2+2xy+y^2$ เพราะมีค่าเท่ากันเสมอทุกค่า x และ y ดังนั้นจึงใช้แทนกันได้เมื่ออยู่ในนิพจน์อื่นๆ ที่ใหญ่กว่า เช่น $(x+y)^2-5$ ย่อมมีค่าเท่ากับ $(x^2+2xy+y^2)-5$ เป็นต้น. จะเห็นว่าเครื่องหมาย = มีความเหมาะสมที่จะใช้แสดงการสมมูลกันของนิพจน์ในพีชคณิต ดังนั้นเราจึงเขียนว่า $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ และ $a(x+y) = ax+ay$ เป็นต้น.

ในทางตรรกศาสตร์ เราก็พูดถึงการสมมูลกันของประพจน์สองประพจน์ในทำนองเดียวกัน. เป็นที่แน่ชัดว่า ถ้าประพจน์ประกอบคู่ใดมีค่าความจริงเหมือนกันในทุกกรณีแล้ว ประพจน์ประกอบทั้งสองนั้นย่อมใช้แทนกันได้เมื่อเป็นโอเปอแรนด์ของโอเปอเรเตอร์เชิงตรรกต่างๆ. เราจะกล่าวว่าประพจน์ประกอบทั้งสองนั้น**สมมูลกันเชิงตรรก** (logically equivalent) หรือเรียกสั้นๆ ว่า**สมมูลกัน**. ตัวอย่างเช่นในหัวข้อที่แล้วเราพบว่า ประพจน์ $p\longleftrightarrow q$ มีค่าความจริงเหมือนกับประพจน์ $(p\longrightarrow q)\wedge(q\longrightarrow p)$ ทุกกรณีของค่า p และ q ดังนั้นเรากล่าวว่า $p\longleftrightarrow q$ สมมูลกับ $(p\longrightarrow q)\wedge(q\longrightarrow p)$.

สังเกตว่า ถ้าให้ P และ Q เป็นประพจน์ประกอบใดๆ ที่มี p, q, r, ... เป็นประพจน์ย่อยอยู่ภายใน, ประพจน์ P และ Q จะมีค่าความจริงเหมือนกันในทุกกรณีของค่าประพจน์ย่อย p, q, r, ... เมื่อและต่อเมื่อ $P\longleftrightarrow Q$ เป็นจริงในทุกกรณีนั่นเอง. นั่นคือ $P\longleftrightarrow Q$ เป็นสัจนิรันดร์. ข้อสังเกตนี้นำมาซึ่งนิยามอย่างเป็นทางการของการสมมูลเชิงตรรกของประพจน์ ดังนี้:

บทนิยาม 1: ถ้าให้ P และ Q เป็นประพจน์ใดๆ (อาจเป็นประพจน์ประกอบหรือประพจน์เดี่ยวก็ได้) เราจะกล่าวว่า P และ Q **สมมูลกันเชิงตรรก** (logically equivalent) หรือเรียกสั้นๆ ว่า**สมมูลกัน** เมื่อและต่อเมื่อ $P\longleftrightarrow Q$ เป็นสัจนิรันดร์. เราจะเขียน $P\Leftrightarrow Q$ แทนความหมายว่า P และ Q สมมูลกัน.

ดังนั้น เราจึงใช้สัญลักษณ์ $\Leftrightarrow$ แสดงการสมมูลกันของประพจน์ในตรรกศาสตร์ในทำนองเดียวกับที่เราใช้สัญลักษณ์ = แสดงการสมมูลกันของนิพจน์ในระบบจำนวนจริง.

วิธีอย่างง่ายและตรงไปตรงมาในการแสดงว่าประพจน์ประกอบคู่ใดสมมูลกัน ทำได้โดยการสร้างตารางค่าความจริงสำหรับประพจน์ประกอบทั้งสองนั้น แล้วแสดงให้เห็นว่าในทุกกรณีของค่าประพจน์ย่อย ประพจน์ประกอบทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันทุกประการ ดังในตัวอย่าง 1 และ 2.

ตัวอย่าง 1 : จงแสดงว่าประพจน์ $p\longrightarrow q$ และ $\sim q\longrightarrow\sim p$ สมมูลกัน.

วิธีทำ เราสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ทั้งสองโดยเขียนอยู่ในตารางเดียวกันดังนี้

p	q	~p	~q	p→q	~q→~p
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

จะเห็นว่าค่าความจริงของประพจน์ทั้งสองเหมือนกันในทุกกรณีของค่า p และ q ดังนั้นประพจน์ทั้งสองสมมูลกัน. เราเขียนได้ว่า $p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$

❑

ผลที่ได้จากตัวอย่าง 1 นับว่าน่าสนใจ นั่นคือประพจน์ $p \to q$ สมมูลกับคอนทราโพสิทิฟของมันเสมอ.

ตัวอย่าง 2 : จงแสดงว่าประพจน์ $(p \vee q) \vee r$ และ $p \vee (q \vee r)$ สมมูลกัน.

วิธีทำ เราสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ทั้งสองโดยเขียนอยู่ในตารางเดียวกันดังนี้

p	q	r	p∨q	q∨r	(p∨q)∨r	p∨(q∨r)
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

จะเห็นว่าค่าความจริงของประพจน์ทั้งสองเหมือนกันในทุกกรณีของค่า p, q, และ r ดังนั้นประพจน์ทั้งสองสมมูลกัน. เราเรียกการสมมูลนี้ว่า *กฎการเปลี่ยนหมู่ (associative law)* สำหรับโอเปอเรเตอร์ $\vee$.

❑

ให้สังเกตว่า ตารางค่าความจริงสำหรับประพจน์ประกอบที่มีประพจน์ย่อยอยู่ภายใน n ประพจน์ จะต้องมีจำนวนแถวในตารางทั้งหมด 2^n แถวเพื่อแสดงกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด 2^n กรณีสำหรับค่าความจริงของประพจน์ย่อย. ตัวอย่างเช่นในตัวอย่าง 2 ประพจน์ประกอบทั้งสองมี 3 ประพจน์ย่อยคือ p, q, และ r ตารางค่าความจริงจึงต้องมีทั้งหมด $2^3 = 8$ แถว.

กฎตรรกศาสตร์

ตาราง 1 และ 2 แสดงสมมูลเชิงตรรกที่สำคัญๆ ในตรรกศาสตร์ โดยที่ p, q, และ r เป็นประพจน์ใดๆ (อาจเป็นประพจน์เดี่ยวหรือประพจน์ประกอบก็ได้), $\mathcal{T}$ แทนประพจน์ใดๆ ที่เป็นจริง, และ $\mathcal{F}$ แทนประพจน์ใดๆ ที่เป็นเท็จ. ผู้อ่านสามารถพิสูจน์สมมูลเหล่านี้ได้โดยใช้ตารางค่าความจริงดังแสดงในตัวอย่าง 1 และ 2 ข้างบน. ที่จริงแล้วการสมมูลกันของประพจน์ในตรรกศาสตร์มีมากมายนับไม่ถ้วน แต่ที่รวบรวมไว้ในตารางทั้งสองเป็นสมมูลขั้นพื้นฐานที่ใช้กันมากในการพิสูจน์สมมูลอื่นๆ และการพิสูจน์สัจนิรันดร์

ต่างๆ. เราจึงเรียกสมมูลขั้นพื้นฐานเหล่านี้ว่า **กฎตรรกศาสตร์** (law of logic) เพื่อยกย่องความสำคัญของมัน.

ผู้อ่านควรตระหนักถึงความสำคัญของกฎข้อที่ 7 คือ *กฎการเปลี่ยนหมู่ (associativity law)* สำหรับโอเปอเรเตอร์ $\vee$ และ $\wedge$. กฎนี้แสดงให้เห็นว่าเมื่อมีโอเปอเรเตอร์ทั้งสองเรียงซ้อนกันอยู่สองตัว ลำดับการดำเนินการก่อนหลังไม่มีความสำคัญ ดังนั้นเรามักจะเขียนโดยละวงเล็บเป็น $p\vee q\vee r$ และ $p\wedge q\wedge r$. ยิ่งไปกว่านั้น เราสามารถใช้*การพิสูจน์โดยอุปนัย (proof by induction)* พิสูจน์ได้ว่ากฎการเปลี่ยนหมู่นี้ใช้ได้เช่นกันในกรณีที่มีจำนวนประพจน์มากกว่าสาม กล่าวคือ ในการหาค่าประพจน์ประกอบ $p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_n$ หรือ $p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_n$ เมื่อ $n \geq 3$ นั้น ลำดับการดำเนินการของ $\vee$ และ $\wedge$ จะเป็นอย่างไรก็ได้ เพราะจะได้ผลเหมือนกัน.

ตาราง 1 : กฎตรรกศาสตร์พื้นฐาน

กฎตรรกศาสตร์	ชื่อ
1) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	กฎการนิเสธสองชั้น (double negation law)
2) $p\vee p \Leftrightarrow p$ $p\wedge p \Leftrightarrow p$	กฎไอเดมโพเทนต์ (idempotent law)
3) $p\vee\mathcal{F} \Leftrightarrow p$ $p\wedge\mathcal{T} \Leftrightarrow p$	กฎเอกลักษณ์ (identity law)
4) $p\vee\mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{T}$ $p\wedge\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}$	กฎการครอบงำ (domination law)
5) $p\vee\sim p \Leftrightarrow \mathcal{T}$ $p\wedge\sim p \Leftrightarrow \mathcal{F}$	กฎการผกผัน (inverse law)
6) $p\vee q \Leftrightarrow q\vee p$ $p\wedge q \Leftrightarrow q\wedge p$	กฎการสลับที่ (commutative law)
7) $(p\vee q)\vee r \Leftrightarrow p\vee(q\vee r)$ $(p\wedge q)\wedge r \Leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$	กฎการเปลี่ยนหมู่ (associative law)
8) $p\vee(q\wedge r) \Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(p\vee r)$ $p\wedge(q\vee r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	กฎการแจกแจง (distributive law)
9) $\sim(p\vee q) \Leftrightarrow \sim p\wedge\sim q$ $\sim(p\wedge q) \Leftrightarrow \sim p\vee\sim q$	กฎของเดอมอร์แกน (De Morgan’s law)

ตาราง 2 : กฎตรรกศาสตร์ที่น่าสนใจ

กฎตรรกศาสตร์	ชื่อ
10) $p\rightarrow q \Leftrightarrow \sim q\rightarrow\sim p$	กฎคอนทราโพสิทิฟ
11) $p\rightarrow q \Leftrightarrow \sim p\vee q$	
12) $p\leftrightarrow q \Leftrightarrow (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$	กฎเงื่อนไขสองทาง (law of bicondition)
13) $p\leftrightarrow q \Leftrightarrow q\leftrightarrow p$	กฎการสลับที่สำหรับโอเปอเรเตอร์ $\leftrightarrow$
14) $p\leftrightarrow q \Leftrightarrow \sim p\leftrightarrow\sim q$	
15) $p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$	กฎการสรุปอย่างมีเงื่อนไข (law of conditional conclusion)

โดยการพิสูจน์โดยอุปนัย เราก็สามารถขยายกฎของเดอมอร์แกนได้เช่นกัน. นั่นคือ เมื่อ $n \geq 2$ เราจะได้

$$\sim(p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_n) \Leftrightarrow \sim p_1\wedge\sim p_2\wedge\ldots\wedge\sim p_n$$

และ

$$\sim(p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_n) \Leftrightarrow \sim p_1\wedge\sim p_2\wedge\ldots\wedge\sim p_n$$

(เราจะศึกษารายละเอียดของวิธีพิสูจน์โดยอุปนัยในบทที่ 2)

กฎตรรกศาสตร์ในตาราง 2 เป็นกฎที่น่าสนใจเกี่ยวกับโอเปอเรเตอร์ $\rightarrow$ และ $\leftrightarrow$. กฎข้อที่ 10 ซึ่งเราพิสูจน์แล้วในตัวอย่าง 1 บอกว่าประพจน์ในรูป *ถ้า p แล้ว q* จะสมมูลกับคอนทราโพสิทิฟของมัน. กฎข้อที่ 11 แสดงให้เห็นว่าเราสามารถแทนการดำเนินงานของโอเปอเรเตอร์ $\rightarrow$ ได้โดยใช้โอเปอเรเตอร์ $\sim$ กับ $\vee$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ โอเปอเรเตอร์ $\rightarrow$ นั้น ที่จริงแล้วเราไม่จำเป็นต้องนิยามขึ้นมาใช้ก็ได้.

กฎข้อที่ 12 ซึ่งเราพิสูจน์ในตาราง 8 และ 9 ในหัวข้อ 1.1 เป็นการแสดงความหมายของโอเปอเรเตอร์ $\leftrightarrow$ ในรูปของโอเปอเรเตอร์ $\rightarrow$ และเป็นที่มาของสำนวน “เมื่อและต่อเมื่อ (if and only if)” กฎข้อที่ 14 ก็มีประโยชน์มาก เพราะทำให้เราอ้างได้ว่า $\sim p$ ก็สมมูลกับ $\sim q$ ด้วยเช่นกัน ถ้าเราทราบว่า p สมมูลกับ q.

ผู้อ่านบางคนอาจสังเกตว่า กฎตรรกศาสตร์ในตาราง 1 จะมีแต่ประพจน์ประกอบที่ใช้โอเปอเรเตอร์ $\sim$, $\vee$, และ $\wedge$ เท่านั้น และทุกกฎยกเว้นกฎข้อที่ 1 จะมีลักษณะเป็นคู่ๆ ซึ่งช่วยให้เราจดจำกฎเหล่านี้ได้ง่ายขึ้น. ลักษณะ**ภาวะคู่** (duality) ดังกล่าวมาจากนิยามและทฤษฎีบทดังต่อไปนี้.

บทนิยาม 2: ถ้า P เป็นประพจน์ประกอบใดๆ ที่ไม่มีโอเปอเรเตอร์เชิงตรรกอื่นใดนอกจาก $\sim$, $\vee$, และ $\wedge$, เราจะเรียกประพจน์ประกอบที่สร้างจาก P โดยการแทนที่ $\vee$ ทุกแห่งด้วย $\wedge$, แทนที่ $\wedge$ ทุกแห่งด้วย $\vee$, แทนที่ $\mathcal{T}$ ทุกแห่งด้วย $\mathcal{F}$, และแทนที่ $\mathcal{F}$ ทุกแห่งด้วย $\mathcal{T}$ ว่า **ดูออล** (dual) ของประพจน์ P เขียนแทนด้วย P^d.

ตัวอย่าง 3 : กำหนดให้ p, q, และ r เป็นประพจน์เดี่ยวใดๆ และให้ P, Q, และ R เป็นประพจน์ประกอบ $(p\vee\sim q)\wedge r$, $\sim(p\wedge q)\vee r\vee\mathcal{T}$, และ $(p\vee\mathcal{F})\wedge\sim(\sim q\vee\mathcal{T})$ ตามลำดับ. จงหาดูออลของประพจน์ประกอบทั้งสาม.

วิธีทำ จากบทนิยาม 2 เราหาดูออลของประพจน์ทั้งสามได้โดยการแทน $\vee$, $\wedge$, $\mathcal{T}$, และ $\mathcal{F}$ ด้วย $\wedge$, $\vee$, $\mathcal{F}$, และ $\mathcal{T}$ ตามลำดับ. ดังนั้นเราได้ P^d คือ $(p\wedge\sim q)\vee r$, Q^d คือ $\sim(p\vee q)\wedge r\wedge\mathcal{F}$, และ R^d คือ $(p\wedge\mathcal{T})\vee\sim(\sim q\wedge\mathcal{F})$.

❑

จากตัวอย่างข้างบนจะเห็นว่า การหาดูออลของประพจน์ประกอบเป็นเรื่องที่ง่ายและตรงไปตรงมา. ประโยชน์ของแนวคิดเรื่องดูออลเกิดจากความจริงสองประการดังต่อไปนี้.

ทฤษฎีบท 1: ถ้า P เป็นประพจน์ประกอบใดๆ ที่ไม่มีโอเปอเรเตอร์เชิงตรรกอื่นใดนอกจาก $\sim$, $\vee$, และ $\wedge$, จะได้ว่า $(P^d)^d = P$. *(นั่นคือ P และ P^d เป็นดูออลของกันและกัน)*

ทฤษฎีบท 2: หลักของภาวะคู่ (Principle of Duality)
ถ้า P และ Q เป็นประพจน์ประกอบใดๆ ที่ไม่มีโอเปอเรเตอร์เชิงตรรกอื่นใดนอกจาก $\sim$, $\vee$, และ $\wedge$ โดยที่ $P\Leftrightarrow Q$, จะได้ว่า $P^d \Leftrightarrow Q^d$ ด้วยเช่นกัน. เราจะกล่าวว่า $P\Leftrightarrow Q$ กับ $P^d\Leftrightarrow Q^d$ เป็น**คู่สมมูล**ของกันและกัน

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 1 นับว่าเป็นเรื่องง่าย ส่วนทฤษฎีบท 2 ซึ่งเรียกว่า**หลักของภาวะคู่**นั้นเป็นผลโดยตรงจากกฎของเดอมอร์แกน (กฎข้อที่ 9 ในตาราง 1) ผู้อ่านควรใคร่ครวญหาความสมเหตุสมผลของทฤษฎีทั้งสองนี้เป็นแบบฝึกหัด.

ประโยชน์สำคัญที่ได้จากหลักของภาวะคู่คือ เมื่อเราพิสูจน์กฎตรรกศาสตร์ได้กฎหนึ่งแล้ว เราก็จะได้คู่สมมูลของมันเป็นอีกกฎหนึ่งโดยไม่ต้องเสียเวลาพิสูจน์อีก. ตัวอย่างเช่น เมื่อเราพิสูจน์กฎของเดอมอร์แกนกฎแรกคือ $\sim(p\vee q) \Leftrightarrow \sim p\wedge\sim q$ ได้แล้ว เราจะสรุปได้ทันทีว่า $\sim(p\vee q) \Leftrightarrow \sim p\vee\sim q$ โดยใช้หลักภาวะคู่ เพราะ $\sim(p\vee q)$ เป็นดูออลกับ $\sim(p\wedge q)$ และ $\sim p\wedge\sim q$ เป็นดูออลกับ $\sim p\vee\sim q$. ด้วยเหตุนี้ เราจึงเขียนกฎตรรกศาสตร์ในตาราง 1 เป็นคู่ๆ โดยในแต่ละคู่เป็นคู่สมมูลของกันและกัน.

พีชคณิตของประพจน์

ในระบบจำนวนจริง เราสามารถพิสูจน์การสมมูลกันของนิพจน์โดยใช้สมมูลทางพีชคณิตที่เราทราบแล้วได้ ตัวอย่างเช่น เราอาจพิสูจน์ว่า $x^2-y^2+4x-2y+3 = (x+y+3)(x-y+1)$ ด้วยขั้นตอนดังนี้

$$\begin{aligned}
x^2-y^2+4x-2y+3 &= (x^2+4x+4)-(y^2+2y+1) \\
&= (x+2)^2-(y+1)^2 && \text{--ใช้สมมูล } (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\
&= (x+2+y+1)(x+2-y-1) && \text{--ใช้สมมูล } a^2-b^2 = (a-b)(a+b) \\
&= (x+y+3)(x-y+1)
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า จากสมมูลพีชคณิตที่เราทราบคือ $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ เราจึงทราบว่านิพจน์ (y^2+2y+1) สมมูลกับ $(y+1)^2$ ดังนั้นเราจึงเอานิพจน์หลังแทนนิพจน์แรกในขั้นตอนที่สองได้.

ในตรรกศาสตร์ เราก็สามารถทำพีชคณิตของประพจน์ในทำนองเดียวกันโดยใช้สมมูลเชิงตรรกที่เราทราบและพิสูจน์แล้ว. พีชคณิตของประพจน์ในตรรกศาสตร์จะเป็นไปตาม**กฎการแทนที่** และ**สมบัติการถ่ายทอดของการสมมูลเชิงตรรก** ดังต่อไปนี้.

ทฤษฎีบท 3: กฎการแทนที่ (substitution rules):

1) กำหนดให้ P เป็นประพจน์ประกอบใดๆ ซึ่งมี q เป็นประพจน์ย่อยอยู่ภายใน และเราทราบว่า $q \Leftrightarrow r$. ถ้าเราสร้างประพจน์ประกอบ Q จากประพจน์ P โดยการแทนที่ประพจน์ q บางแห่งหรือทุกแห่งใน P ด้วยประพจน์ r แล้ว เราจะได้ว่า $P \Leftrightarrow Q$.
2) กำหนดให้ P เป็นสัจนิรันดร์ซึ่งมี q เป็นประพจน์ย่อยอยู่ภายใน. ถ้าเราสร้างประพจน์ประกอบ Q จาก P โดยการแทนที่ประพจน์ q ทุกแห่งใน P ด้วยประพจน์ r ใดๆ แล้ว เราจะได้ว่า Q ก็เป็นสัจนิรันดร์ด้วยเช่นกัน.

ทฤษฎีบท 4: สมบัติการถ่ายทอดของสมมูลเชิงตรรก (transitive property of logical equivalence)

กำหนดให้ p, q, และ r เป็นประพจน์ใดๆ. ถ้า $p \Leftrightarrow q$ และ $q \Leftrightarrow r$ แล้ว, จะได้ $p \Leftrightarrow r$ ด้วยเช่นกัน.

ผู้อ่านควรคิดหาเหตุผลว่าทำไมกฎการแทนที่ทั้งสองข้อและสมบัติการถ่ายทอดของการสมมูลเชิงตรรกจึงเป็นความจริง.

ตัวอย่างการประยุกต์กฎการแทนที่ข้อแรก เช่นเราทราบว่า $\sim q \vee r$ สมมูลกับ $q \rightarrow r$ (จากกฎที่ 11 ในตาราง 2) ดังนั้นประพจน์ประกอบ $p \rightarrow (\sim q \vee r)$ จะสมมูลกับ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

ตัวอย่างการประยุกต์กฎการแทนที่ข้อที่สอง เช่นในตัวอย่าง 8 หัวข้อ 1.1 เราพิสูจน์แล้วว่าประพจน์ประกอบ $(p \wedge q) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์ ดังนั้นถ้าเราแทนที่ประพจน์ย่อย p ทุกแห่งด้วยประพจน์ $p \rightarrow \sim r$ แล้ว ประพจน์ประกอบที่ได้คือ $((p \rightarrow \sim r) \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$ ก็จะยังคงเป็นสัจนิรันดร์เช่นกัน.

สมบัติการถ่ายทอดของการสมมูลเชิงตรรกทำให้สามารถใช้เครื่องหมาย $\Leftrightarrow$ ได้เช่นเดียวกับเครื่องหมาย = ในพีชคณิตของจำนวนจริง เช่นเราเขียนได้ว่า

$$p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee r$$

เพื่อเป็นการพิสูจน์ว่า $p \rightarrow (q \vee r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee r$ เป็นต้น.

กฎการแทนที่และสมบัติการถ่ายทอดของการสมมูลทำให้เราสามารถใช้การดำเนินการทางพีชคณิตของประพจน์ในการพิสูจน์สมมูลเชิงตรรกและสัจนิรันดร์ โดยไม่ต้องพึ่งพาตารางค่าความจริงแต่อย่างใด ดังแสดงในตัวอย่าง 4, 5 และ 6 ข้างล่าง.

ตัวอย่าง 4 : จงพิสูจน์ว่า $(p \wedge q) \vee r$ สมมูลกับ $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ โดยไม่ใช้ตารางค่าความจริง.

<u>*วิธีทำ*</u> วิธีการคือเราจะเริ่มต้นที่ประพจน์ $(p \wedge q) \vee r$ แล้วใช้กฎการแทนที่และสมมูลเชิงตรรกที่เราทราบเปลี่ยนเป็นประพจน์ที่สมมูลกับประพจน์เดิมไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้ประพจน์ $(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ ในที่สุด.

$(p \wedge q) \vee r$	$\Leftrightarrow$	$r \vee (p \wedge q)$	-- *จากกฎการสลับที่*
	$\Leftrightarrow$	$(r \vee p) \wedge (r \vee q)$	-- *จากกฎการแจกแจง*
	$\Leftrightarrow$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	-- *จากกฎการสลับที่*

ดังนั้นจากกฎการถ่ายทอด เราได้ $(p\wedge q)\vee r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ ตามต้องการ. นอกจากนี้ จากหลักของภาวะคู่ เราสรุปได้ด้วยว่า $(p\vee q)\wedge r \Leftrightarrow (p\wedge r)\vee(q\wedge r)$.

❑

สมมูลที่เราพิสูจน์ในตัวอย่าง 4 เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของกฎการแจกแจงดังที่แสดงในตาราง 1. ดังนั้นต่อไปเราจะอ้างถึงสมมูลคู่นี้ในนามของกฎการแจกแจงเช่นกัน.

ตัวอย่าง 5 : จงพิสูจน์ว่า $(p\vee q)\rightarrow r$ สมมูลกับ $(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r)$ โดยไม่ใช้ตารางค่าความจริง.

<u>วิธีทำ</u>

$(p\vee q)\rightarrow r$	$\Leftrightarrow \sim(p\vee q)\vee r$	-- *จากกฎ $p\rightarrow q \Leftrightarrow \sim p\vee q$*
	$\Leftrightarrow (\sim p\wedge\sim q)\vee r$	-- *จากกฎของเดอมอร์แกน*
	$\Leftrightarrow (\sim p\vee r)\wedge(\sim p\vee r)$	-- *จากกฎการแจกแจง*
	$\Leftrightarrow (p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$	-- *จากกฎ $p\rightarrow q \Leftrightarrow \sim p\vee q$*

ดังนั้นจากกฎการถ่ายทอด เราได้ $(p\vee q)\rightarrow r \Leftrightarrow (p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$ ตามต้องการ.

❑

ตัวอย่าง 6 : จงพิสูจน์ว่าประพจน์ประกอบ $((p\rightarrow q)\wedge p)\rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์โดยไม่ใช้ตารางค่าความจริง.

<u>วิธีทำ</u> เราจะพิสูจน์โดยการแสดงให้เห็นว่าประพจน์ดังกล่าวสมมูลกับ $\mathcal{T}$.

$((p\rightarrow q)\wedge p)\rightarrow q$	$\Leftrightarrow ((\sim p\vee q)\wedge p)\rightarrow q$	-- *จากกฎ $p\rightarrow q \Leftrightarrow \sim p\vee q$*
	$\Leftrightarrow ((\sim p\wedge p)\vee(q\wedge p))\rightarrow q$	-- *จากกฎการแจกแจง*
	$\Leftrightarrow (\mathcal{F}\vee(q\wedge p))\rightarrow q$	-- *จากกฎการผกผัน*
	$\Leftrightarrow (q\wedge p)\rightarrow q$	-- *จากกฎเอกลักษณ์*
	$\Leftrightarrow \sim(q\wedge p)\vee q$	-- *จากกฎ $p\rightarrow q \Leftrightarrow \sim p\vee q$*
	$\Leftrightarrow (\sim q\vee\sim p)\vee q$	-- *จากกฎของเดอมอร์แกน*
	$\Leftrightarrow (\sim p\vee\sim q)\vee q$	-- *จากกฎการสลับที่*
	$\Leftrightarrow \sim p\vee(\sim q\vee q)$	-- *จากกฎการเปลี่ยนหมู่*
	$\Leftrightarrow \sim p\vee\mathcal{T}$	-- *จากกฎการผกผัน*
	$\Leftrightarrow \mathcal{T}$	-- *จากกฎการครอบงำ*

การสมมูลกับ $\mathcal{T}$ แสดงว่าประพจน์นี้เป็นจริงเสมอในทุกกรณี ดังนั้นประพจน์นี้เป็นสัจนิรันดร์.

❑

ตัวอย่างที่ 6 เป็นตัวอย่างที่ดีในแง่ที่ใช้กฎเกือบทุกข้อในตาราง 1 แต่ในกรณีนี้การพิสูจน์โดยใช้ตารางค่าความจริงน่าจะง่ายและเร็วกว่ามาก เนื่องจากสัจนิรันดร์นี้มีประพจน์ย่อยเพียงสองตัว.

1.3 ตัวบ่งปริมาณ (quantifiers)

ฟังก์ชันเชิงประพจน์ (propositional function)

เราอาจเขียนข้อความที่ติดอยู่ในรูปของตัวแปร เช่น “3 หาร x ลงตัว”, “x+y = 0”, และ “$A\cap B$ เป็นเซตว่าง” เป็นต้น. ข้อความเหล่านี้ไม่ใช่ประพจน์ เพราะเราไม่ได้กำหนดค่าของตัวแปร x, y, A, และ B ที่แน่นอน จึงไม่อาจหาค่าความจริงได้. แต่ถ้าเรากำหนดค่าให้กับตัวแปรทุกตัวในข้อความ ข้อความเหล่านี้ก็จะเป็นประพจน์ทันที เช่น ถ้าเราให้ x = 5 และ y = 2, ข้อความ “x+y = 0” ก็คือ “5+2 = 0” ซึ่งมีค่าความจริงเป็นเท็จ ดังนั้นจึงเป็นประพจน์. เราเรียก*ข้อความที่ค่าความจริงของมันขึ้นกับค่าของตัวแปรภายในข้อความ*ว่าเป็น **ฟังก์ชันเชิงประพจน์** (propositional function) และอาจเขียนแทนได้ในรูปแบบของฟังก์ชัน เช่น เราอาจเขียนแทนข้อความทั้งสามข้างบนด้วย P(x), Q(x,y), และ R(A,B) ตามลำดับ. ดังนั้น Q(5,2) จะแทนข้อความ “5+2 = 0” ซึ่งเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ.

การนิยามฟังก์ชันเชิงประพจน์หนึ่งๆ นอกจากจะต้องกำหนดว่าฟังก์ชันนั้นแทนข้อความใดและมีตัวแปรอยู่ในข้อความนั้นกี่ตัวแล้ว ยังต้องกำหนดด้วยว่าตัวแปรแต่ละตัวมีค่าเป็นอะไรได้บ้าง. เราเรียกเซตของค่าที่ไปได้ทั้งหมดของตัวแปรหนึ่งๆ ว่าเป็น **เอกภพ** (universe) ของตัวแปรนั้น. ตัวอย่างเช่น เราอาจจะกำหนดว่าเอกภพของตัวแปร x และ y ของฟังก์ชัน Q(x,y) ในย่อหน้าที่แล้วเป็น*เซตจำนวนเต็ม*เป็นต้น.

ตัวอย่าง 1 : กำหนดให้ฟังก์ชันเชิงประพจน์ P(x,y,z) แทนข้อความ “$x/y > z$” โดยมีเอกภพของ x, y, และ z คือเซตจำนวนจริง, เซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่ไม่เท่ากับศูนย์, และเซตจำนวนเต็มตามลำดับ. จงหาค่าความจริงของ P(2.5,5,0), P(0,10,5), และ P(3.1,y,5).

<u>*วิธีทำ*</u> P(2.5, 5,0) คือข้อความ “$2.5/5 > 0$” ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริง (เพราะ 0.5 มากกว่า 0)

P(0,10,5) คือข้อความ “$0/10 > 5$” ซึ่งมีค่าความจริงเป็นเท็จ (เพราะ 0 ไม่มากกว่า 5)

P(3.1,y,5) คือข้อความ “$3.1/y > 5$” ยังไม่มีค่าความจริง เพราะยังไม่ได้กำหนดค่าตัวแปร y.

❏

ควรทราบว่าฟังก์ชันเชิงประพจน์อาจจะไม่ใช่ข้อความเดี่ยว แต่เป็น*ข้อความประกอบ*ที่ประกอบด้วยข้อความย่อยหลายตัวที่เชื่อมกันด้วยโอเปอเรเตอร์เชิงตรรก. ตัวอย่างเช่น ถ้าให้ P(x) แทนข้อความ “x เป็นจำนวนเต็มลบ”, Q(x) แทนข้อความ “$x^2 > 0$”, และ r แทนข้อความ “3 หาร 10 ลงตัว”, ข้อความ

“ถ้า 3 หาร 10 ลงตัวและ x เป็นจำนวนเต็มลบแล้ว, $x^2 > 0$.”

ก็คือข้อความ $(P(x)\wedge r)\longrightarrow Q(x)$ ซึ่งมีค่าความจริงขึ้นอยู่กับค่าของตัวแปร x ดังนั้นข้อความนี้จึงเป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์ด้วยเช่นกัน และอาจกำหนดให้ S(x) แทนข้อความประกอบนี้.

อนึ่ง การกำหนดค่าให้กับตัวแปรทุกตัวในข้อความที่เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์ ไม่ได้เป็นเพียงวิธีเดียวที่จะทำให้ข้อความนั้นกลายเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริง. ยังมีอีกวิธีหนึ่งที่ทำให้ฟังก์ชันเชิงประพจน์กลายเป็นประพจน์ได้ นั่นคือการใช้**ตัวบ่งปริมาณ** (quantifier) เป็นวลีขยายข้อความนั้น. ตัวบ่งปริมาณที่ใช้กันทั่วไปมีสองแบบใหญ่ๆ คือ*ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด* และ*ตัวบ่งปริมาณการมี* ดังจะกล่าวในหัวข้อต่อไป.

การบ่งปริมาณทั้งหมด

วิธีการหนึ่งที่จะทำให้ข้อความที่เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์กลายเป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงคือการบ่งบอกว่า *ข้อความนั้นเป็นความจริงสำหรับทุกๆ ค่าของตัวแปรในเอกภพ.* ตัวอย่างเช่น ข้อความ “3 หาร n ลงตัว” โดยที่เอกภพของ n คือเซตจำนวนเต็ม เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์ที่ยังไม่มีค่าความจริง. แต่เมื่อเรากล่าวว่า “3 หาร n ลงตัว *สำหรับทุกๆ จำนวนเต็ม n*” เราจะบอกได้ทันทีว่าข้อความนี้เป็น*เท็จ*อย่างแน่นอน เพราะมีจำนวนเต็มบางตัว (เช่น 2) ที่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว ดังนั้นข้อความหลังนี้จึงเป็นประพจน์อย่างเต็มภาคภูมิ แม้ว่าจะยังติดอยู่ในรูปของตัวแปร n ก็ตาม. เราเรียกวลี *“สำหรับทุกๆ ...”* ที่ขยายความฟังก์ชันเชิงประพจน์นี้ว่า **ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด** (universal quantifier) ซึ่งมีบทนิยามอย่างเป็นทางการดังต่อไปนี้.

> **บทนิยาม 1**: กำหนดให้ $P(x)$ เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์ใดๆ โดยมีเซต A เป็นเอกภพของตัวแปร x. เราเรียกประพจน์ *“P(x) สำหรับทุก x ใน A”* ว่า **การบ่งปริมาณทั้งหมดของ P(x)** (the universal quantification of P(x)) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\forall x\in A\ P(x)$ หรือเขียนโดยละเอกภพของ x ไว้ในฐานที่เข้าใจว่า $\forall x\ P(x)$. เราเรียกสัญลักษณ์ $\forall$ ว่า **ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด** (universal quantifier).
>
> ประพจน์ $\forall x\in A\ P(x)$ เป็นจริง ถ้า $P(x)$ เป็นจริงสำหรับทุกค่า x ในเซต A และเป็นเท็จ ถ้ามี x อย่างน้อยหนึ่งค่าใน A ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ.

ตาราง 1 แสดงภาษาเขียนสำหรับประพจน์ $\forall x\in A\ P(x)$ ที่ใช้กันทั่วไปในวรรณกรรมทางคณิตศาสตร์. ในความเห็นของผู้เขียน แบบแรกเป็นการสื่อความหมายของประพจน์นี้ที่ถูกต้องแม่นยำที่สุด.

ควรสังเกตว่า ในกรณีที่เอกภพ A เป็น*เซตจำกัด (finite set)* ที่มีสมาชิก n ตัว โดย $n \geq 1$ และ$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ เราจะได้ว่า ประพจน์ $\forall x\in A\ P(x)$ จะมีความหมายเดียวกับประพจน์ประกอบ $P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge...\wedge P(a_n)$ นั่นเอง.

ตาราง 1 : ภาษาเขียนสำหรับประพจน์ $\forall x\in A\ P(x)$

ภาษาไทย	ภาษาอังกฤษ
สำหรับแต่ละ x ใน A, P(x) (หรือ ***P(x) สำหรับแต่ละ x ใน A***)	***for each x in A, P(x)*** (or ***P(x) for each x in A***)
สำหรับทุก x ใน A, P(x) (หรือ ***P(x) สำหรับทุก x ใน A***)	***for every x in A, P(x)*** (or ***P(x) for every x in A***)
สำหรับ x ทั้งหมดใน A, P(x) (หรือ ***P(x) สำหรับ x ทั้งหมดใน A***)	***for all x in A, P(x)*** (or ***P(x) for all x in A***)

ตัวอย่าง 2 : กำหนดให้เอกภพของตัวแปร x คือเซตจำนวนจริง และเอกภพของตัวแปร n คือเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่น้อยกว่า 4, และให้ $P(x)$ แทนข้อความ “$x^2 \geq x$” และ $Q(n)$ แทนข้อความ “$n^2 < 10$” จงหาค่าความจริงของข้อความ $\forall x\ P(x)$, $\forall n\ Q(n)$, และ $\forall x(Q(2)\rightarrow P(x))$.

<u>*วิธีทำ*</u> พิจารณาข้อความ $\forall x\ P(x)$ (ซึ่งอาจเขียนว่า $\forall x\ [x^2 \geq x]$). จะเห็นว่าเราสามารถหาจำนวนจริง x บางตัวที่ทำให้ P(x) ไม่จริงได้ เช่นเมื่อ x=0.1 เป็นต้น ดังนั้นข้อความ $\forall x\ P(x)$ จึงเป็นเท็จ.

เนื่องจากเอกภพของตัวแปร n คือเซต {1,2,3} ข้อความ $\forall n\ Q(n)$ ก็คือข้อความ $Q(1)\wedge Q(2)\wedge Q(3)$ นั่นเอง ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริง เพราะทั้ง Q(1), Q(2), และ Q(3) เป็นจริงหมด.

พิจารณาข้อความ $\forall x(Q(2)\longrightarrow P(x))$ (ซึ่งอาจเขียนว่า $\forall x([2^2 < 10]\longrightarrow[x^2 \geq x])$). จะเห็นว่า $Q(2)\longrightarrow P(0.1)$ เป็นเท็จ แสดงว่ามีจำนวนจริง x อย่างน้อยหนึ่งตัว (คือ 0.1) ที่ทำให้ข้อความ $Q(2)\longrightarrow P(x)$ เป็นเท็จ. ดังนั้นข้อความ $\forall x(Q(2)\longrightarrow P(x))$ จึงเป็นเท็จ.

❏

การบ่งปริมาณการมี

อีกวิธีการหนึ่งที่จะทำให้ข้อความที่เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์ P(x) ใดๆ มีค่าความจริงก็คือ การบ่งบอกว่า *P(x) เป็นจริงสำหรับ x บางตัวในเอกภพ* ตัวอย่างเช่น ถ้าให้เอกภพของ x คือเซตจำนวนจริง, ข้อความ “$x^2 \geq x$” ยังเป็นเพียงฟังก์ชันเชิงประพจน์ แต่ข้อความ “$x^2 \geq x$ สำหรับจำนวนจริง x บางตัว” เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง (เพราะเมื่อ x เท่ากับ 2, $2^2 \geq 2$ จริง). เราเรียกวลี *“สำหรับ x บางตัว”* ที่ขยายความฟังก์ชันเชิงประพจน์นี้ว่า **ตัวบ่งปริมาณการมี** (existential quantifier) ซึ่งมีนิยามอย่างเป็นทางการดังต่อไปนี้.

บทนิยาม 2: กำหนดให้ P(x) เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์ใดๆ โดยมีเซต A เป็นเอกภพของตัวแปร x. เราเรียกประพจน์ *“P(x) สำหรับ x บางตัวใน A”* ว่า **การบ่งปริมาณการมีของ P(x)** (the existential quantification of P(x)) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\exists x\in A\ P(x)$ หรือเขียนโดยละเอกภพของ x ไว้ในฐานที่เข้าใจว่า $\exists x\ P(x)$. เราเรียกสัญลักษณ์ $\exists$ ว่า **ตัวบ่งปริมาณการมี** (existential quantifier).

ประพจน์ $\exists x\in A\ P(x)$ เป็น<u>จริง</u> ถ้ามี x อย่างน้อยหนึ่งตัวใน A ที่ทำให้ P(x) เป็นจริง และเป็น<u>เท็จ</u> ถ้าทุก x ใน A ทำให้ P(x) เป็นเท็จ.

ตาราง 2 : ภาษาเขียนสำหรับประพจน์ $\exists x\in A\ P(x)$

ภาษาไทย	ภาษาอังกฤษ
มี x บางตัวใน A ที่ P(x)	***there exists some x in A such that P(x)***
มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวใน A ที่ P(x)	***there exists at least one x in A such that P(x)*** (or ***there exists an x in A such that P(x)***)
สำหรับ x บางตัวใน A, P(x) (หรือ ***P(x) สำหรับ x บางตัวใน A***)	***for some x in A, P(x)*** (or ***P(x) for some x in A***)

ตาราง 2 แสดงภาษาเขียนทางคณิตศาสตร์สำหรับประพจน์ $\exists x \in A\ P(x)$. ควรสังเกตว่า ในกรณีที่เอกภพ A เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก n ตัว โดย $n \geq 1$ และ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ เราจะได้ว่า ประพจน์ $\exists x \in A\ P(x)$ จะมีความหมายเดียวกับประพจน์ประกอบ $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$ นั่นเอง.

ตัวอย่าง 3: กำหนดให้ข้อความ P(x) และ Q(n) เป็นดังในตัวอย่าง 2. จงหาค่าความจริงของข้อความ $\exists x\ P(x)$, $\exists n\ Q(n)$, และ $\exists x(Q(2) \rightarrow P(x))$.

<u>*วิธีทำ*</u> พิจารณาข้อความ $\exists x\ P(x)$ (ซึ่งอาจเขียนว่า $\exists x\ [x^2 \geq x]$). จะเห็นว่าเมื่อ x มีค่าเท่ากับ 1 ข้อความ $x^2 \geq x$ จะเป็นจริง แสดงว่ามีจำนวนจริง x บางตัวที่ทำให้ P(x) เป็นจริง ดังนั้นข้อความ $\exists x\ P(x)$ จึงเป็นจริง.

เนื่องจากเอกภพของตัวแปร n คือเซต {1,2,3} ข้อความ $\exists n\ Q(n)$ ก็คือข้อความ $Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3)$ นั่นเอง. จะเห็นว่า Q(1) เป็นจริง (เพราะ $1^2 < 10$) แสดงว่ามี n อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ Q(n) จริง. ดังนั้นข้อความ $\exists n\ Q(n)$ เป็นจริง.

พิจารณาข้อความ $\exists x(Q(2) \rightarrow P(x))$ (ซึ่งอาจเขียนว่า $\exists x([2^2 < 10] \rightarrow [x^2 \geq x])$). จะเห็นว่า $Q(2) \rightarrow P(1)$ เป็นจริง (เพราะทั้ง Q(2) และ P(1) เป็นจริง) แสดงว่ามีจำนวนจริง x อย่างน้อยหนึ่งตัว (คือ 1) ที่ทำให้ข้อความ $Q(2) \rightarrow P(x)$ เป็นจริง. ดังนั้นข้อความ $\exists x(Q(2) \rightarrow P(x))$ จึงเป็นจริง.
❑

ตัวอย่าง 4: กำหนดให้ P(x) แทนข้อความ "x ว่ายน้ำเป็น" และ Q(x) แทนข้อความ "x อาศัยอยู่ในนนทบุรี", A คือเซตของคนที่อาศัยอยู่ในประเทศไทย, และ B คือเซตของคนที่อาศัยอยู่ในนนทบุรี จงเขียนข้อความ "คนที่อาศัยอยู่ในนนทบุรีบางคนว่ายน้ำไม่เป็น" และข้อความ "ทุกคนที่อาศัยอยู่ในนนทบุรีว่ายน้ำไม่เป็น" ในรูปสัญลักษณ์โดยใช้ P(x) และ/หรือ Q(x) ถ้ากำหนดให้เอกภพของ x ใน P(x) และ Q(x) คือ

(ก) เซตของคนที่อาศัยอยู่ในนนทบุรี (ข) เซตของคนที่อาศัยอยู่ในประเทศไทย

<u>*วิธีทำ*</u>

(ก) ถ้าเอกภพของ x คือเซตของคนที่อาศัยอยู่ในนนทบุรี เราจะเขียนข้อความทั้งสองได้อย่างตรงไปตรงมาว่า $\exists x \sim P(x)$ และ $\forall x \sim P(x)$ ตามลำดับ.

(ข) ถ้าเอกภพของ x คือเซตของคนที่อาศัยอยู่ในประเทศไทย ข้อความแรกคือ $\exists x(Q(x) \wedge \sim P(x))$ ส่วนข้อความที่สองคือ $\forall x(Q(x) \rightarrow \sim P(x))$.

ผู้อ่านควรหาเหตุผลว่าทำไม $\exists x(Q(x) \rightarrow \sim P(x))$ มีความหมายไม่ตรงกับข้อความแรก และทำไม $\forall x(Q(x) \wedge \sim P(x))$ มีความหมายไม่ตรงกับข้อความที่สอง.
❑

ตัวอย่าง 4 แสดงให้เห็นว่าข้อความหนึ่งๆ อาจเขียนในรูปสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ได้แตกต่างกัน ถ้ากำหนดเอกภพของตัวแปรต่างกัน.

การตรึงตัวแปรและการใช้ตัวบ่งปริมาณหลายชั้น

ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น การทำให้ข้อความในรูปฟังก์ชันเชิงประพจน์มีค่าความจริงทำได้โดยกำหนดค่าให้กับตัวแปรแต่ละตัวหรือการใช้ตัวบ่งปริมาณ. เมื่อเรากำหนดค่าให้กับตัวแปรใดหรือใช้ตัวบ่ง

ปริมาณสำหรับตัวแปรใดในฟังก์ชันเชิงประพจน์ เรากล่าวว่าตัวแปรตัวนั้น**ถูกตรึง** (bound) และเราจะเรียกตัวแปรที่ยังไม่ถูกตรึงว่า**เป็นอิสระ** (free).

ตัวอย่าง 5: กำหนดให้เอกภพของตัวแปร x และตัวแปร y คือเซตจำนวนเต็ม และให้ฟังก์ชันเชิงประพจน์ P(x,y) คือข้อความ "x-y = 5" พิจารณาความหมายและค่าความจริงของข้อความ P(1,y), P(1,0), $\forall$x P(x,y), $\exists$y P(x,y), $\exists$x P(x,1), และ$\forall$x$\exists$y P(x,y).

วิธีทำ สำหรับข้อความ P(1,y), ตัวแปร x ถูกตรึงให้มีค่าเป็น 1 ส่วนตัวแปร y ยังเป็นอิสระ. ข้อความนี้คือ "1-y = 5" ซึ่งยังไม่มีค่าความจริง. เรากล่าวได้ว่าค่าความจริงของข้อความนี้ขึ้นกับตัวแปรอิสระ y.

สำหรับข้อความ P(1,0), ทั้งตัวแปร x และ y ถูกตรึงให้มีค่าเป็น 1 และ 0 ตามลำดับ. ข้อความนี้คือ "1-0 = 5" ซึ่งมีค่าความจริงเป็นเท็จ.

สำหรับข้อความ $\forall$x P(x,y), ตัวแปร x ถูกตรึงด้วยตัวบ่งปริมาณ $\forall$x, ในขณะที่ตัวแปร y ยังเป็นอิสระ. ข้อความนี้อ่านได้ว่า "สำหรับแต่ละ x, x-y=5" ซึ่งค่าความจริงยังคงขึ้นกับค่า y.

สำหรับข้อความ $\exists$y P(x,y), ตัวแปร y ถูกตรึงด้วยตัวบ่งปริมาณ $\exists$y, ในขณะที่ x ยังเป็นตัวแปรอิสระ. ข้อความนี้อ่านได้ว่า "มี y บางตัวที่ x-y=5" ซึ่งค่าความจริงยังคงขึ้นกับค่า x.

สำหรับข้อความ $\exists$x P(x,1), ตัวแปร x ถูกตรึงด้วยตัวบ่งปริมาณ $\exists$x และตัวแปร y ถูกตรึงให้มีค่าเป็น 1. ข้อความนี้อ่านได้ว่า "มี x บางตัวที่ x-1 = 5" ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริง เพราะ x บางตัวที่ว่านั้นคือ 6 นั่นเอง.

สำหรับข้อความ $\forall$x$\exists$y P(x,y), ตัวแปร x ถูกตรึงด้วยตัวบ่งปริมาณ $\forall$x และตัวแปร y ถูกตรึงด้วยตัวบ่งปริมาณ $\exists$y. ข้อความนี้อ่านได้ว่า "สำหรับแต่ละ x, มี y บางตัวที่ x-y = 5" ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงเพราะสำหรับ x ใดๆ จะหา y ที่ทำให้สมการนี้เป็นจริงได้เสมอคือให้ y มีค่าเท่ากับ x-5.

❑

จากตัวอย่าง 5 ข้างบน เราจะเห็นได้ว่า ข้อความที่เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์จะมีค่าความจริงได้เมื่อและต่อเมื่อตัวแปร*ทุกตัว*ในฟังก์ชันถูกตรึงด้วยการกำหนดค่าและ/หรือการใช้ตัวบ่งปริมาณ. สังเกตว่าข้อความ $\forall$x$\exists$y P(x,y) ในตัวอย่างเป็นการใช้ตัวบ่งปริมาณสองชั้น.

ควรเข้าใจว่า ข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณหลายชั้นดังเช่น $\exists$x$\forall$y$\exists$z Q(x,y,z) จะมีความหมายเหมือนกับเราเขียนเป็นชั้นๆ ว่า $\exists$x($\forall$y($\exists$z Q(x,y,z))) นั่นคือตัวบ่งปริมาณ $\exists$x ตรึงตัวแปร x ในข้อความ $\forall$y($\exists$z Q(x,y,z)), ตัวบ่งปริมาณ $\forall$y ตรึงตัวแปร y ในข้อความ $\exists$z Q(x,y,z), และตัวบ่งปริมาณ $\exists$z ตรึงตัวแปร z ในข้อความ Q(x,y,z). เช่นนี้ เราสามารถหาความหมายของข้อความ $\exists$x$\forall$y$\exists$z Q(x,y,z) ได้โดยตีความเป็นลำดับดังนี้ :

$\exists$x$\forall$y$\exists$z Q(x,y,z) มีความหมายว่า "มี x บางค่าที่ทำให้ข้อความ $\forall$y$\exists$z Q(x,y,z) เป็นจริง"

$\forall$y$\exists$z Q(x,y,z) มีความหมายว่า "สำหรับทุกค่า y, ข้อความ $\exists$z Q(x,y,z) เป็นจริง"

$\exists$z Q(x,y,z) มีความหมายว่า "มี z บางค่าที่ทำให้ข้อความ Q(x,y,z) เป็นจริง"

ตัวอย่าง 6 : ถ้าให้ D(x) แทนข้อความ "x เลี้ยงสุนัข" และ F(x,y) แทนข้อความ "x เป็นเพื่อนกับ y" โดยที่เอกภพของ x และ y คือเซตของนิสิตปัจจุบันทั้งหมดของมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, จงเขียนข้อความ $\exists$x(D(x)$\wedge$$\forall$y(F(x,y)$\longrightarrow$D(y))) เป็นภาษาไทย.

<u>*วิธีทำ*</u> เราจะตีความข้อความนี้โดยถอดเป็นชั้นๆ จากนอกไปใน. ข้อความนี้มีใจความหลักคือ มีนิสิต x บางคนที่ทำให้ $D(x)\wedge\forall y(F(x,y)\rightarrow D(y))$ เป็นจริง. (ตัวแปร x ถูกตรึงเป็นตัวแรกด้วย $\exists x$)

นั่นคือ นิสิต x คนดังกล่าวเลี้ยงสุนัขและสำหรับนิสิต y แต่ละคน, ข้อความ $F(x,y)\rightarrow D(y)$ เป็นความจริง กล่าวคือ ถ้า x ดังกล่าวเป็นเพื่อนกับ y จะได้ว่า y ก็เลี้ยงสุนัขด้วยเช่นกัน.

สรุปเป็นคำพูดสั้นๆ ได้ว่า “มีนิสิตบางคนที่ตัวเขาเลี้ยงสุนัขและเพื่อนของเขาทุกคน(ที่เป็นนิสิต)ก็เลี้ยงสุนัขด้วยเช่นกัน”

❑

ตัวอย่าง 7 : ถ้าให้ F(x,y) มีความหมายดังในตัวอย่าง 6, จงเขียนข้อความข้างล่างนี้เป็นภาษาไทย.

$$\forall y\forall z((F(\text{ทักษิณ},y)\wedge F(\text{ทักษิณ},z)\wedge[y\neq z]) \rightarrow \sim F(y,z))$$

<u>*วิธีทำ*</u> ข้อความนี้ ตัวแปรตัวแรกของ F บางแห่งถูกตรึงให้มีค่า “ทักษิณ” ในขณะที่ตัวแปร y และ z จะถูกตรึงด้วยตัวบ่งปริมาณ $\forall$. ข้อความนี้กล่าวว่า *สำหรับนิสิต y และ z ทุกคน, ถ้าทักษิณเป็นเพื่อนกับทั้ง y และ z โดยที่ y กับ z ไม่ใช่คนคนเดียวกันแล้ว, จะได้ว่า y มิได้เป็นเพื่อนกับ z*. หรืออาจเขียนสั้นๆ ได้ว่า “เพื่อนทุกคนของทักษิณไม่เป็นเพื่อนของกันและกันเลย”

❑

คำถามที่น่าสนใจคือ ถ้าเราสลับที่ตัวบ่งปริมาณในข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณหลายชั้น ข้อความใหม่ที่ได้จะมีความหมายเหมือนเดิมหรือไม่? ก่อนที่เราจะพิจารณาประเด็นนี้โดยละเอียด เรามาดูตัวอย่างต่อไปนี้.

ตัวอย่าง 8 : ให้ P(x,y) แทนข้อความ “x−y = 1” โดย x และ y คือจำนวนเต็มใดๆ. จงแสดงความหมายและค่าความจริงของข้อความ $\forall x\exists y\ P(x,y)$, $\exists y\forall x\ P(x,y)$, $\exists x\forall y\ P(x,y)$, และ $\forall y\exists x\ P(x,y)$.

<u>*วิธีทำ*</u> ข้อความ $\forall x\exists y\ P(x,y)$ มีความหมายว่า ไม่ว่าจำนวนเต็ม x จะมีค่าเท่าใด จะสามารถหาจำนวนเต็ม y ได้ที่ทำให้ x−y = 1. จะเห็นว่าเราหาค่า y ดังกล่าวได้เสมอสำหรับแต่ละค่า x นั่นคือให้ y = x−1. ดังนั้นข้อความนี้จึงเป็น<u>จริง</u>.

ข้อความ $\exists y\forall x\ P(x,y)$ มีความหมายว่า มีจำนวนเต็ม y บางตัวที่ทำให้ x−y = 1 สำหรับทุกจำนวนเต็ม x. เราทราบว่าไม่มีจำนวนเต็มตัวใดที่จะนำไปลบจำนวนเต็มทุกตัวแล้วได้ 1 เสมอ ดังนั้นข้อความนี้เป็น<u>เท็จ</u>.

ข้อความ $\exists x\forall y\ P(x,y)$ มีความหมายว่า มีจำนวนเต็ม x บางตัวที่ทำให้ x−y = 1 สำหรับทุกจำนวนเต็ม y. เราทราบว่าไม่มีจำนวนเต็มตัวใดที่ถูกลบด้วยจำนวนเต็มทุกตัวแล้วได้ 1 เสมอ ดังนั้นข้อความนี้เป็น<u>เท็จ</u>.

ข้อความ $\forall y\exists x\ P(x,y)$ มีความหมายว่า ไม่ว่าจำนวนเต็ม y จะมีค่าเท่าใด จะสามารถหาจำนวนเต็ม x ได้ที่ทำให้ x−y = 1. จะเห็นว่าเราหาค่า x ดังกล่าวได้เสมอสำหรับแต่ละค่า y นั่นคือให้ x = y+1. ดังนั้นข้อความนี้จึงเป็น<u>จริง</u>.

❑

จากตัวอย่างที่ 8 จะเห็นว่าข้อความทั้งสี่มีความหมายไม่เหมือนกันเลย ดังนั้นไม่จำเป็นต้องมีค่าความจริงเหมือนกัน. ทั้งยังแสดงให้เห็นว่า โดยทั่วไปแล้ว การสลับที่ตัวบ่งปริมาณที่แตกต่างกัน (นั่นคือระหว่าง $\forall$ กับ $\exists$) จะทำให้ความหมายของข้อความเปลี่ยนไป ดังนั้นค่าความจริงไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน.

คราวนี้เรามาลองพิจารณาการสลับที่กันระหว่างตัวบ่งปริมาณประเภทเดียวกันว่าจะทำให้ความหมายของข้อความเปลี่ยนไปหรือไม่. ลองพิจารณาเปรียบเทียบความหมายของข้อความ $\forall x\forall y$ Q (x,y) กับ $\forall y \forall x\ Q(x,y)$ เมื่อ Q(x,y) เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์ใดๆ. ข้อความแรกมีความหมายว่า "สำหรับทุกค่าของ x, Q(x,y) จะเป็นจริงทุกค่าของ y" ในขณะที่ข้อความที่สองมีความหมายว่า "สำหรับทุกค่าของ y, Q(x,y) จะเป็นจริงทุกค่าของ x" จะเห็นว่า ที่แท้แล้วข้อความทั้งสองมีความหมายเหมือนกันทุกประการ นั่นคือมีความหมายโดยสรุปว่า "Q(x,y) เป็นจริงทุกค่าของ x และ y" นั่นเอง.

ในทำนองเดียวกัน ข้อความ $\exists x \exists y\ Q(x,y)$ กับข้อความ $\exists y \exists x\ Q(x,y)$ ก็มีความหมายเหมือนกันเช่นกัน นั่นคือหมายความว่า "มีค่า x และ y อย่างน้อยหนึ่งคู่ ที่ทำให้ Q(x,y) เป็นจริง"

ดังนั้นเราสรุปได้ว่า การสลับที่ตัวบ่งปริมาณประเภทเดียวกันที่อยู่ติดกันไม่ได้ทำให้ความหมายของข้อความเปลี่ยนไป.

ตัวอย่างข้างล่างต่อไปนี้แสดงการแทนข้อความในภาษาไทยในรูปของสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์.

ตัวอย่าง 9 : ให้ E(s,r) แทนข้อความ "นิสิต s เคยเข้าไปในห้อง r" และ L(r,b) แทนข้อความ "ห้อง r อยู่ในตึก b" โดยที่เอกภพของ s, r, และ b คือเซตของนิสิตทั้งหมดในมหาวิทยาลัย, เซตของห้องทั้งหมดในมหาวิทยาลัย, และเซตของตึกทั้งหมดในมหาวิทยาลัย ตามลำดับ. จงใช้ฟังก์ชัน E และ L เขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์:

(ก) ไม่ว่าจะเป็นนิสิตคนใดก็ตาม จะมีตึกบางตึกที่เขาไม่เคยเข้าไปในห้องใดในตึกนั้นแม้แต่ห้องเดียว

(ข) มีตึกบางตึกที่นิสิตทุกคนไม่เคยเข้าไปในห้องใดในตึกนั้นแม้แต่ห้องเดียว

(ค) นิสิตบางคนเคยเข้าไปในห้องอย่างน้อยหนึ่งห้องของทุกๆตึก

_วิธีทำ_

(ก) การบอกว่า "นิสิต s ไม่เคยเข้าไปในห้องใดเลยในตึก b" ก็คือการบอกว่า "ไม่ว่าห้อง r ใดก็ตาม ถ้า r อยู่ในตึก b แล้ว, นิสิต s ไม่เคยเข้าห้อง r" ซึ่งเขียนได้ว่า $\forall r(L(r,b)\rightarrow\sim E(s,r))$. ดังนั้นข้อความที่เราต้องการคือ $\forall s \exists b \forall r(L(r,b)\rightarrow\sim E(s,r))$.

(ข) ใช้วิธีคิดทำนองเดียวกับข้อ (ก) แต่ได้คำตอบที่ต่างไปเล็กน้อย นั่นคือ $\exists b \forall s \forall r(L(r,b)\rightarrow\sim E(s,r))$. ให้สังเกตว่าคำตอบข้อ (ก) กับ (ข) ต่างกันเพียงสลับที่ $\forall s$ กับ $\exists b$ เท่านั้น แต่ความหมายแตกต่างกันโดยสิ้นเชิง. (แตกต่างกันอย่างไร?)

(ค) การบอกว่า "นิสิต s เคยเข้าในห้องอย่างน้อยหนึ่งห้องของตึก b" ก็คือการบอกว่า "มีห้อง r บางห้องที่อยู่ในตึก b และ s เคยเข้าไปในห้องนั้น" ซึ่งเขียนได้ว่า $\exists r(L(r,b)\wedge E(s,r))$. ดังนั้นข้อความที่เราต้องการคือ $\exists s \forall b \exists r(L(r,b)\wedge E(s,r))$.

❑

ตัวอย่าง 10 : ให้ A เป็นเซตของคนทั้งโลก, T เป็นเซตของคนไทยทั้งหมด, และให้ M(x) แทน "x เป็นผู้ชาย", W(x,y) แทน "x แต่งงานกับ y", และ S(x,y) แทน "x เป็นลูกเขยของ y" โดยที่เอกภพของตัวแปรทุกตัวคือเซต A. จงเขียนข้อความ "ผู้ชายทุกคนในโลกที่แต่งงานกับหญิงไทยจะเป็นลูกเขยของคนไทยบางคน" ในรูปของฟังก์ชัน M, W, และ S.

_วิธีทำ_ เราจะต้องหาวิธีแสดงข้อความดังกล่าวใหม่ในสำนวนของ M, W, และ S. จะเห็นว่าข้อความดังกล่าวก็คือ "ไม่ว่าใครก็ตามในโลกนี้ ถ้าเขาเป็นผู้ชายและแต่งงานกับคนไทยบางคนแล้ว จะต้องมีคนไทยบางคนที่เขาเป็นลูกเขยของคนผู้นั้น" ซึ่งแปลงเป็นสัญลักษณ์ได้อย่างตรงไปตรงมาว่า

$$\forall x\in A\ ((M(x)\wedge\exists y\in T\ W(x,y))\rightarrow\exists z\in T\ S(x,z))$$

จะเห็นว่าในข้อความข้างบนนี้ เราจำเป็นต้องบ่งบอกให้ชัดเจนว่าตัวแปร x, y, และ z อยู่ในเซต A หรือ T เพื่อไม่ให้มีความหมายกำกวม.

❏

สิ่งที่น่าคิดเป็นอย่างยิ่งเกี่ยวกับตัวอย่าง 10 คือข้อความต่อไปนี้มีความหมายเหมือนหรือต่างจากคำตอบในตัวอย่าง 10 อย่างไร?

(ก) $\forall x\in A\ \exists y\in T\ \exists z\in T\ ((M(x)\wedge W(x,y))\longrightarrow S(x,z))$

(ข) $\forall x\in A\ ((M(x)\wedge\exists y\in T\ W(x,y))\longrightarrow\exists y\in T\ S(x,y))$

(ค) $\forall x\in A\ \exists y\in T\ ((M(x)\wedge W(x,y))\longrightarrow S(x,y))$

คำตอบคือข้อความ (ก) และ (ข) มีความหมายเหมือนคำตอบในตัวอย่าง 10 แต่ข้อความ (ค) กลับมีความหมายต่างออกไป เพราะเหตุใด? ผู้อ่านจะใช้ความเข้าใจเรื่องการตรึงตัวแปรมาอธิบายได้อย่างไร?

การบ่งปริมาณการมีเพียงหนึ่งเดียว

อย่างที่เราทราบแล้วว่า เราสามารถกล่าวถึงการมีอยู่ของสิ่งๆหนึ่งได้โดยใช้*ตัวบ่งปริมาณการมี* เช่น $\exists x[5x=1]$ มีความหมายว่า "*มีจำนวนจริง x อย่างน้อยหนึ่งค่า*ที่คูณกับ 5 แล้วได้ 1" ในกรณีนี้ เราทราบด้วยว่าจำนวนจริง x ที่ทำให้ 5x=1 นี้ *มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น* นั่นคือเมื่อ x=0.2. เราจะแสดงข้อความ "*มีจำนวนจริงเพียงค่าเดียวเท่านั้น*ที่คูณกับ 5 แล้วได้ 1" ในรูปสัญลักษณ์ได้อย่างไร?

นี่คือตัวอย่างของข้อความที่กล่าวถึง*การมีอยู่เพียงหนึ่งเดียว*ของสิ่งๆหนึ่ง ซึ่งพบบ่อยๆในวรรณกรรมทางคณิตศาสตร์. ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงวิธีเขียนข้อความแบบนี้ในรูปสัญลักษณ์.

ตัวอย่าง 11 : จงเขียนข้อความ "มีจำนวนจริงเพียงค่าเดียวเท่านั้นที่คูณกับ 5 แล้วได้ 1" ในรูปสัญลักษณ์.
วิธีทำ วิธีเขียนข้อความในลักษณะ "มีเพียงตัวเดียว" ทำได้โดยการแยกเป็นสองส่วนคือ "มีค่า x ที่มีคุณสมบัติดังกล่าวอยู่" และ "ถ้ามีค่าอื่นใดที่มีคุณสมบัติดังกล่าวอีก, ค่านั้นก็คือค่า x ตัวเดิมนั่นเอง" ดังนั้นเราสามารถแปลงให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์อย่างตรงไปตรงมาได้ว่า (ให้ $\mathbb{R}$ คือเซตจำนวนจริง)

$$\exists x\in\mathbb{R}([5x=1]\wedge\forall y\in\mathbb{R}([5y=1]\longrightarrow[y=x]))$$

❏

กล่าวโดยทั่วไปคือ ถ้าให้ P(x) เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์ใดๆ, ข้อความ *"มี x เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่ทำให้ P(x) เป็นจริง"* จะเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\exists x(P(x)\wedge\forall y(P(y)\longrightarrow[y=x])) \qquad \text{--- ①}$$

หรืออาจเอา $\forall y$ ไว้ข้างนอกได้ ดังนี้

$$\exists x\forall y(P(x)\wedge(P(y)\longrightarrow[y=x])) \qquad \text{--- ②}$$

การเขียนเช่นนี้มีกลยุทธดังกล่าวในตัวอย่าง 11 คือเรามองความหมายของ "การมีเพียงหนึ่งเดียว" เป็นสองส่วน นั่นคือส่วนของ**การมี** (existence) และส่วนของ**การมีเพียงตัวเดียว** (uniqueness). ส่วนของการมีในข้อความนี้คือ $\exists x(P(x)...)$ ในขณะที่ส่วนของการมีเพียงตัวเดียวคือส่วน $\exists x(...\forall y(P(y)\longrightarrow[y=x]))$ ซึ่งในทั้งสองส่วน ตัวแปร x จะตรึงกับตัวบ่งปริมาณ $\exists x$ อันเดียวกัน. เมื่อเป็นเช่นนี้ ทั้งสองส่วนมิได้แยกเป็นอิสระจากกันโดยสิ้นเชิง เพราะตัวแปร x ในทั้งสองส่วนถือเป็นตัวเดียวกัน.

เรายังมีวิธีเขียนบ่งปริมาณการมีเพียงหนึ่งเดียวอีกแบบหนึ่ง โดยที่*ส่วนของการมี*และ*ส่วนของการมีเพียงตัวเดียว*แยกเป็นอิสระจากกันในแง่ที่ว่า ตัวแปรทุกตัวในทั้งสองส่วนไม่ถือเป็นตัวเดียวกัน เพราะถูกตรึงด้วยตัวบ่งปริมาณคนละตัว. ด้วยวิธีนี้ *ส่วนของการมี*ยังคงเขียนในลักษณะเดิม แต่*ส่วนของการมีเพียงหนึ่งเดียว*นั้น เราจะเขียนในลักษณะที่ว่า *"ถ้ามี x และ y คู่ใดก็ตามที่ทำให้ P(x) และ P(y) เป็นจริงทั้งคู่แล้ว, x จะเท่ากับ y"* ดังนั้นข้อความ *"มี x เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่ทำให้ P(x) เป็นจริง"* จึงเขียนได้อีกแบบหนึ่งเป็นแบบที่สามว่า

$$(\exists x\, P(x)) \wedge \forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \longrightarrow [x=y]) \quad \text{---} ③$$

ให้สังเกตว่า การเขียนแบบนี้ ส่วนของการมี (คือ $\exists x\, P(x)$) และส่วนของการมีเพียงตัวเดียว (คือ $\forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \longrightarrow [x=y])$) เป็นข้อความที่เป็นอิสระจากกันโดยสิ้นเชิง ทำให้ค่าความจริงของส่วนหนึ่งมิได้ส่งผลกระทบต่อค่าความจริงของอีกส่วนหนึ่งแต่อย่างใด. ดังนั้นพึงตระหนักว่า แม้ส่วนการมีจะเป็นเท็จ แต่ส่วนของการมีเพียงตัวเดียวอาจจะเป็นจริงก็ได้ เพราะส่วนหลังนี้บอกแต่เพียงว่า ถ้ามีค่าสองค่าใดที่ทำให้ P เป็นจริงแล้ว ทั้งสองค่านั้นคือค่าเดียวกัน แต่ไม่ได้ทึกทักว่าจำเป็นต้องมีค่า x ใดที่ทำให้ P(x) เป็นจริงแต่ประการใด.

การเขียนบ่งปริมาณการมีเพียงหนึ่งเดียวแบบที่สามนี้ให้ความหมายที่มีประโยชน์มากในการพิสูจน์ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปดังกล่าว. กล่าวคือ ถ้าเราต้องการพิสูจน์ว่าข้อความที่ว่า *"มี x เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่ทำให้ P(x) เป็นจริง"* ว่าเป็นความจริง เทคนิคมาตรฐานในการพิสูจน์คือเราจะแยกพิสูจน์เป็นสองส่วนที่เป็นอิสระจากกันคือ

1. ***พิสูจน์ส่วนการมี*** *(existence proof)* นั่นคือพิสูจน์ว่า *มี x บางตัวที่ทำให้ P(x) เป็นจริง*
2. ***พิสูจน์ส่วนการมีเพียงตัวเดียว*** *(uniqueness proof)* นั่นคือพิสูจน์ว่า *ถ้ามี x และ y ที่ทำให้ P(x) และ P(y) เป็นจริงแล้ว, x จะเท่ากับ y.*

เราจะกลับมากล่าวถึงเทคนิคการพิสูจน์แบบนี้โดยละเอียดอีกครั้งในบทที่ 3.

เนื่องจากเราพบข้อความที่กล่าวถึง*การมีอยู่เพียงหนึ่งเดียว*บ่อยๆในคณิตศาสตร์ ดังนั้นเพื่อความสะดวกเราจะนิยาม**ตัวบ่งปริมาณการมีเพียงหนึ่งเดียว** (uniquely existential quantifier) ไว้ใช้ โดยอ้างอิงจากข้อความแบบ ③ ข้างบนดังนี้.

บทนิยาม 3: กำหนดให้ P(x) เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์ใดๆ โดยมีเซต A เป็นเอกภพของตัวแปร x. เราเรียกข้อความ $(\exists x P(x)) \wedge \forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \longrightarrow [x=y])$ ว่า **การบ่งปริมาณการมีเพียงหนึ่งเดียวของ P(x)** (the uniquely existential quantification of P(x)) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\exists! x \in A\ P(x)$ หรือเขียนโดยละเอกภพของ x ไว้ในฐานที่เข้าใจว่า $\exists! x\ P(x)$. เราเรียกสัญลักษณ์ $\exists!$ ว่า **ตัวบ่งปริมาณการมีเพียงหนึ่งเดียว** (uniquely existential quantifier).

เรานิยามตัวบ่งปริมาณ $\exists!$ โดยใช้ตัวบ่งปริมาณ $\exists$ และ $\forall$ เพื่อแสดงให้เห็นว่าตัวบ่งปริมาณ $\exists!$ นี้ไม่จำเป็นต้องนิยามขึ้นมาก็ได้. ด้วยบทนิยามดังกล่าว ค่าความจริงของข้อความ $\exists! x \in A\ P(x)$ จะเป็นดังทฤษฎีบทต่อไปนี้.

ทฤษฎีบท 1: ข้อความ $\exists! x\in A\ P(x)$ เป็นจริง ถ้ามี x เพียงค่าเดียวใน A ที่ทำให้ P(x) เป็นจริง, และเป็น เท็จ ถ้าทุก x ใน A ทำให้ P(x) เป็นเท็จ หรือถ้ามี x มากกว่าหนึ่งค่าใน A ที่ทำให้ P(x) เป็นจริง.

ผู้อ่านควรพิจารณาหาเหตุผลว่าทำไมบทนิยาม 3 จึงทำให้ทฤษฎีบท 1 เป็นความจริง. ตาราง 3 แสดงภาษาเขียนที่ใช้กันทั่วไปสำหรับการบ่งปริมาณการมีเพียงหนึ่งเดียว.

ด้วยตัวบ่งปริมาณใหม่นี้ เราอาจเขียนข้อความในตัวอย่าง 11 ได้อย่างสะดวกและกระทัดรัดยิ่งว่า $\exists! x\in \mathbb{R}\ [5x=1]$.

ตาราง 3 : ภาษาเขียนสำหรับประพจน์ $\exists! x\in A\ P(x)$

ภาษาไทย	ภาษาอังกฤษ
มี x เพียงตัวเดียวใน A ที่ P(x)	***there exists exactly one x in A such that P(x)*** (or ***there is one and only one x in A such that P(x)***)
มี x เพียงหนึ่งเดียวใน A ที่ P(x)	***there exists a unique x in A such that P(x)***

ตัวอย่าง 12 : ให้ A เป็นเซตของคนทั้งโลก และให้ M(x,y) แทนข้อความ “x เป็นแม่ของ y” โดยให้ A เป็นเอกภพของตัวแปรทุกตัว. จงเขียนข้อความ “คนทุกคนมีแม่เพียงคนเดียว” ในรูปสัญลักษณ์.

วิธีทำ ถ้าเราใช้ตัวบ่งปริมาณ $\exists!$ เราจะเขียนข้อความดังกล่าวได้ดังนี้

$$\forall y\exists! x\ M(x,y)$$

แต่ถ้าเราจะใช้เฉพาะตัวบ่งปริมาณ $\exists$ และ $\forall$ เท่านั้น เราจะเขียนข้อความดังกล่าวได้หลายแบบ ได้แก่

$$\forall y((\exists x\ M(x,y)) \wedge \forall a\forall b((M(a,y)\wedge M(b,y))\longrightarrow[a=b]))$$

หรือ $\forall y\exists x(M(x,y)\wedge\forall z(M(z,y)\longrightarrow[z=x]))$

หรือ $\forall y\exists x(M(x,y)\wedge\forall z([z\neq x]\longrightarrow\sim M(z,y)))$

❑

การบ่งปริมาณโดยนัย (Implicit Quantification)

ในวรรณกรรมทางคณิตศาสตร์ เรามักพบข้อความที่ไม่มีการบ่งปริมาณโดยชัดเจน แต่เป็นการบ่งปริมาณโดยละไว้ในฐานที่เข้าใจ ซึ่งเราอาจเรียกว่าเป็น**การบ่งปริมาณโดยนัย** (implicit quantification) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 13 : พิจารณาข้อความ “ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว, n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่”

ข้อความนี้ถึงแม้ว่าจะมีตัวแปรอิสระ n อยู่ แต่ที่แท้แล้วเป็นข้อความที่มีการบ่งปริมาณโดยนัย โดยมีความหมายเดียวกับข้อความ

“สำหรับทุกจำนวนเต็ม n, ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว, n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่”

หรือ

“สำหรับทุกจำนวนเต็มคี่ n, n^2 เป็นจำนวนเต็มคี่”

โดยข้อความทั้งสองนี้ต่างกันที่การกำหนดเอกภพของ n เท่านั้น.

❑

ตัวอย่าง 14 : พิจารณาข้อความ “จำนวนเต็มคู่ทุกตัวที่มากกว่า 4 เป็นผลบวกของจำนวนเฉพาะสองตัว”

ข้อความนี้แฝงตัวบ่งปริมาณซ้อนถึงสามชั้น. วลี “จำนวนเต็มคู่ทุกตัว” แสดงว่าตัวบ่งปริมาณชั้นนอกควรเป็นตัวบ่งปริมาณทั้งหมด. ส่วนวลี “เป็นผลบวกของจำนวนเฉพาะสองตัว” นั้น เขียนได้อีกอย่างหนึ่งว่า “มีจำนวนเฉพาะสองตัวที่บวกกันแล้วได้จำนวนเต็มคู่นั้น.” ดังนั้นจึงแฝงตัวบ่งปริมาณการมี.

ดังนั้นข้อความนี้อาจเขียนแบบยืดยาวเพื่อแสดงการบ่งปริมาณอย่างชัดเจนได้ว่า

“สำหรับจำนวนเต็ม x ใดๆ, ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคู่ที่มากกว่า 4 แล้ว, จะมีจำนวนเฉพาะ m และ n ซึ่ง x=m+n”

ซึ่งอาจเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\forall x\in \mathbb{Z}\ \exists m\in \mathbb{P}\ \exists n\in \mathbb{P}\ (([x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}]\wedge[x > 4])\longrightarrow[x=m+n])$$

โดย $\mathbb{Z}$ คือเซตจำนวนเต็มและ $\mathbb{P}$ คือเซตจำนวนเฉพาะ.

❑

จากตัวอย่างทั้งสองข้างบน จะเห็นว่าการเขียนข้อความโดยใช้ตัวบ่งปริมาณโดยนัยจะมีความกระทัดรัดกว่าและบางครั้งก็อ่านเข้าใจได้ง่ายกว่าการบ่งปริมาณโดยชัดเจน จึงเป็นที่นิยมใช้ในการเขียนข้อความในทฤษฎีบทต่างๆอยู่เสมอ. นอกจากนี้ การแสดงเอกลักษณ์ทางพีชคณิตเช่น $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ หรือในตรีโกณมิติเช่น $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ก็ล้วนแล้วแต่เป็นการบ่งปริมาณทั้งหมดของตัวแปร x และ y โดยนัยทั้งสิ้น.

นิเสธของการบ่งปริมาณ (negation of quantification)

ถ้าให้ P(x) เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์ใดๆ, นิเสธของข้อความ $\forall x\ P(x)$ ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\sim\forall x\ P(x)$$

จะมีความหมายว่า “ไม่เป็นความจริงที่ P(x) จะเป็นจริงสำหรับทุก x”. ถ้าพิจารณาให้ดี จะเห็นว่าข้อความนี้มีความหมายเดียวกับข้อความ “มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ P(x) ไม่เป็นจริง” หรือเขียนได้อีกอย่างหนึ่งว่า “มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ ~P(x) เป็นจริง” นั่นเอง ซึ่งข้อความหลังสุดนี้เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\exists x \sim P(x)$$

ดังนั้น เราได้กฎตรรกศาสตร์ที่มีประโยชน์คือ

$$\boxed{\sim\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x \sim P(x)}$$

ต่อไปเรามาพิจารณานิเสธของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณการมี. นิเสธของข้อความ $\exists x\ P(x)$ เขียนได้ว่า $\sim\exists x\ P(x)$ และมีความหมายว่า “ไม่เป็นความจริงที่ว่ามี x บางตัวที่ทำให้ P(x) เป็นจริง”. จะเห็นว่าข้อความนี้มีความหมายเช่นเดียวกับการกล่าวว่า “P(x) เป็นเท็จสำหรับทุก x” หรือเขียนได้ว่า “~P(x) เป็นจริงสำหรับทุก x” ซึ่งเขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า $\forall x \sim P(x)$. ดังนั้นเราได้กฎตรรกศาสตร์อีกกฎหนึ่งคือ

$$\sim\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ \sim P(x)$$

เราสามารถใช้กฎตรรกศาสตร์ทั้งสองนี้ มาพิจารณานิเสธของข้อความที่มีตัวบ่งปริมาณหลายชั้นได้ เพราะเราทราบว่าข้อความดังเช่น $\exists x\forall y\exists z\ P(x,y,z)$ มีความหมายเหมือนกับการเขียนเป็นชั้นๆ ว่า $\exists x(\forall y(\exists z P(x,y,z)))$ ดังนั้นเราสามารถข้อความที่สมมูลกับนิเสธของข้อความนี้ได้โดยการประยุกต์กฎตรรกศาสตร์ทั้งสองข้างบนจากชั้นนอกสู่ชั้นในดังนี้:

$\sim\exists x\forall y\exists z\ P(x,y,z) \Leftrightarrow \forall x\sim\forall y\exists z\ P(x,y,z)$ -- *ใช้กฎที่สอง*

$\Leftrightarrow \forall x\exists y\sim\exists z\ P(x,y,z)$ -- *ใช้กฎแรก*

$\Leftrightarrow \forall x\exists y\forall z\ \sim P(x,y,z)$ -- *ใช้กฎที่สอง*

นั่นคือ ข้อความทั้งสี่รูปแบบข้างบนสมมูลกันหมด.

ตัวอย่าง 15 : จงหานิเสธของข้อความ “จำนวนเต็มคู่ทุกตัวที่มากกว่า 4 เป็นผลบวกของจำนวนเฉพาะสองตัว”

<u>*วิธีทำ*</u> จากตัวอย่าง 14 ข้อความนี้เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$\forall x\in\mathbb{Z}\ \exists m\in\mathbb{P}\ \exists n\in\mathbb{P}\ (([x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}]\wedge[x>4])\rightarrow[x=m+n])$

ดังนั้นนิเสธของข้อความนี้และสมมูลของมันคือ

$\sim\forall x\in\mathbb{Z}\ \exists m\in\mathbb{P}\ \exists n\in\mathbb{P}\ (([x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}]\wedge[x>4])\rightarrow[x=m+n])$

$\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{Z}\ \sim\exists m\in\mathbb{P}\ \exists n\in\mathbb{P}\ (([x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}]\wedge[x>4])\rightarrow[x=m+n])$

$\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{Z}\ \forall m\in\mathbb{P}\ \sim\exists n\in\mathbb{P}\ (([x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}]\wedge[x>4])\rightarrow[x=m+n])$

$\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{Z}\ \forall m\in\mathbb{P}\ \forall n\in\mathbb{P}\ \sim(([x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}]\wedge[x>4])\rightarrow[x=m+n])$

$\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{Z}\ \forall m\in\mathbb{P}\ \forall n\in\mathbb{P}\ \sim(([x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}]\wedge[x>4])\rightarrow[x=m+n])$

$\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{Z}\ \forall m\in\mathbb{P}\ \forall n\in\mathbb{P}\ \sim(([x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}]\wedge[x>4])\rightarrow[x=m+n])$

$\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{Z}\ \forall m\in\mathbb{P}\ \forall n\in\mathbb{P}\ ([x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}]\wedge[x>4]\wedge[x\neq m+n])$

ข้อความสุดท้ายเขียนเป็นภาษาธรรมดาได้ว่า “มีจำนวนเต็มคู่ที่มากกว่า 4 บางตัวที่ไม่เป็นผลบวกของจำนวนเฉพาะสองตัวใดเลย”. ผู้อ่านควรตรวจสอบว่าข้อความนี้มีความหมายเป็นนิเสธของข้อความที่โจทย์ตั้งมาจริงหรือไม่.

❏

แบบฝึกหัด 1.1

1. ข้อความต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่ เพราะเหตุใด.
   a) นนทบุรีเป็นเมืองหลวงของประเทศไทย.
   b) x-x = 0
   c) สำหรับทุกจำนวนเต็ม x และ y, x+y = y+x.
   d) จงละเว้นจากการฆ่าสัตว์ตัดชีวิต.
   e) กาลิเลโอจามทั้งหมด 56,873 ครั้งในชั่วชีวิตของเขา.
   f) มีสุนัขอย่างน้อย 10 ตัวในโลกนี้ที่มี 7 หาง.
   g) มีจำนวนจริง x บางตัวซึ่ง 2x = 5.
2. จงเขียนนิเสธของประพจน์ต่อไปนี้.
   a) พรุ่งนี้เป็นวันจันทร์. b) ต้นไม้บางต้นมีดอกสีแดง.
   c) ต้นไม้ทุกต้นมีดอกสีแดง. d) $5+3 > 8$
   e) ยีราฟมี 4 ขาและมีคอยาว.
3. ให้ p คือประพจน์ “ทักษิณป่วย”, q คือประพจน์ “ทักษิณขาดสอบ”, และ r คือประพจน์ “ทักษิณสอบผ่าน”. จงเขียนประพจน์ประกอบต่อไปนี้เป็นภาษาเขียนทางคณิตศาสตร์.
   a) $p\rightarrow q$ b) $\sim q \leftrightarrow r$ c) $q\rightarrow\sim r$
   d) $p\vee q\vee r$ e) $(p\rightarrow\sim r)\vee(q\rightarrow\sim r)$ f) $(p\wedge q)\vee(\sim q\wedge r)$
4. ให้ p คือประพจน์ “ศิรินุชได้คะแนนสูงสุดในการสอบปลายภาค”, q คือประพจน์ “ศิรินุชทำแบบฝึกหัดทุกข้อ”, และ r คือประพจน์ “ศิรินุชได้เกรดเอ”. จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์.
   a) ศิรินุชได้เกรดเอ แต่เธอไม่ได้ทำแบบฝึกหัดทุกข้อ.
   b) ศิรินุชได้เกรดเอก็ต่อเมื่อเธอได้คะแนนสูงสุดในการสอบปลายภาค.
   c) แม้ว่าศิรินุชไม่ได้ทำแบบฝึกหัดทุกข้อ เธอก็ได้คะแนนสูงสุดในการสอบปลายภาคและได้เกรดเอ.
   d) การที่ศิรินุชทำแบบฝึกหัดทุกข้อและได้คะแนนสูงสุดในการสอบปลายภาค เพียงพอที่จะทำให้เธอได้เกรดเอในที่สุด.
   e) ศิรินุชได้เกรดเอ เมื่อและต่อเมื่อเธอแบบฝึกหัดทุกข้อหรือได้คะแนนสูงสุดในการสอบปลายภาค.
5. จงแสดงคอนเวอร์สและคอนทราโพสิทิฟของประพจน์ต่อไปนี้.
   a) ถ้า 6 หารจำนวนเต็มใดลงตัว, 2 ก็หารจำนวนเต็มนั้นลงตัวเช่นกัน.
   b) ภัทรกรจะเข้าเรียนเมื่อใดก็ตามที่มีการสอบย่อย.
   c) เพื่อที่จะเข้ารอบสอง ซาอุดีอาระเบียจำเป็นต้องชนะคาเมรูน.
6. ช่างตัดผมคนหนึ่งจะโกนหนวดให้เฉพาะคนที่ไม่โกนหนวดตัวเองเท่านั้น. เป็นไปได้หรือไม่ที่จะมีช่างตัดผมเช่นนี้ เพราะเหตุใด.
7. ข้อความ “ข้อความนี้เป็นเท็จ” เป็นประพจน์หรือไม่ เพราะเหตุใด.
8. จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือข้อขัดแย้งหรือไม่.
   a) $(\sim p\wedge(p\rightarrow q))\rightarrow\sim q$ b) $(\sim(p\oplus q))\leftrightarrow(p\leftrightarrow q)$ c) $((p\rightarrow q)\rightarrow r)\leftrightarrow(p\rightarrow(q\rightarrow r))$
   d) $\sim(p\rightarrow q)\wedge\sim p$

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงใช้ตารางค่าความจริงพิสูจน์สมมูลเชิงตรรกต่อไปนี้:

   a) $p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$ b) $p\rightarrow(q\vee r) \Leftrightarrow (p\wedge\sim q)\rightarrow r$

   c) $\sim(p\leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \leftrightarrow q$ d) $p\leftrightarrow q \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$
2. จงพิสูจน์สมมูลเชิงตรรกในข้อ 1 โดยไม่ใช้ตารางค่าความจริง.
3. จากแบบฝึกหัด 1.1 ข้อ 8(b), เราสรุปได้ว่าประพจน์ประกอบ $\sim(p\oplus q)$ กับประพจน์ประกอบ $p\leftrightarrow q$ สมมูลเชิงตรรกกันหรือไม่ เพราะเหตุใด.
4. จากแบบฝึกหัด 1.1 ข้อ 8(c), เราสรุปได้ว่าประพจน์ประกอบ $(p\rightarrow q)\rightarrow r$ กับประพจน์ประกอบ $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ สมมูลเชิงตรรกกันหรือไม่ เพราะเหตุใด.
5. กฎตรรกศาสตร์ข้อที่ 6 ในตาราง 1 แสดงกฎการสลับที่สำหรับโอเปอเรเตอร์ $\vee$ และ $\wedge$. จงตรวจสอบว่ามีกฎการสลับที่สำหรับโอเปอเรเตอร์ $\oplus$, $\rightarrow$, และ $\leftrightarrow$ หรือไม่.
6. กฎตรรกศาสตร์ข้อที่ 7 ในตาราง 1 แสดงกฎการเปลี่ยนหมู่สำหรับโอเปอเรเตอร์ $\vee$ และ $\wedge$. จงตรวจสอบว่ามีกฎการเปลี่ยนหมู่สำหรับโอเปอเรเตอร์ $\oplus$, $\rightarrow$, และ $\leftrightarrow$ หรือไม่.
7. จงพิสูจน์คู่สมมูลต่อไปนี้ ซึ่งเรียกว่า **กฎการดูดกลืน** (absorption laws).

   a) $p\vee(p\wedge q) \Leftrightarrow p$ b) $p\wedge(p\vee q) \Leftrightarrow p$
8. จงแสดงว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์โดยไม่ใช้ตารางค่าความจริง.

   a) $(p\wedge q)\rightarrow p$ b) $\sim p\rightarrow(p\rightarrow q)$

   c) $(p\wedge q)\rightarrow(p\rightarrow q)$ d) $\sim(p\rightarrow q) \rightarrow p$
9. จงหาดูออลของประพจน์ประกอบต่อไปนี้.

   a) $(p\vee\sim q)\wedge\sim r$ b) $p\wedge\sim(q\vee\mathcal{F}\vee\sim r)$ c) $\sim(p\wedge\mathcal{T})\vee(\mathcal{F}\wedge q)$
10. จงแสดงความสมเหตุสมผลของทฤษฎีบท 1.
11. จงแสดงให้เห็นว่าหลักภาวะคู่ (ทฤษฎีบท 2) เป็นผลจากกฎของเดอมอร์แกน.
12. จงแสดงความสมเหตุสมผลของกฎการแทนที่ (ทฤษฎีบท 3).
13. จงแสดงความสมเหตุสมผลของสมบัติการถ่ายทอดของสมมูลเชิงตรรก (ทฤษฎีบท 4).

แบบฝึกหัด 1.3

1. ให้ P(x) แทนข้อความ “คำ x มีตัวอักษร i อย่างน้อยสองตัว”. จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้:

   a) P(intersection) b) P(pineapple) c) P(idiotic) d) P(lemonade)

2. ให้ P(x,y) แทนข้อความ “x เคยไปจังหวัด y” โดยที่เอกภพของตัวแปร x คือเซตของนักเรียนทั้งหมดในห้องเรียนของท่าน และเอกภพของตัวแปร y คือเซตของจังหวัดทั้งหมดในประเทศไทย. จงเขียนข้อความบ่งปริมาณต่อไปนี้เป็นข้อความภาษาไทย.

   a) $\exists x \exists y\ P(x,y)$ b) $\exists x \forall y\ P(x,y)$ c) $\forall x \exists y\ P(x,y)$

   d) $\exists y \forall x\ P(x,y)$ e) $\forall y \exists x\ P(x,y)$ f) $\forall x \forall y\ P(x,y)$

   g) $\exists x \sim P(x,\text{สระแก้ว})$ h) $\forall y\ P(\text{ปรีดาภรณ์},y)$ i) $\exists x\ [P(x,\text{แพร่}) \wedge P(x,\text{น่าน})]$

   j) $\exists x \forall y\ ([x \neq \text{ทวี}] \wedge (P(\text{ทวี},y) \rightarrow P(x,y)))$

   k) $\exists x\ ([x \neq \text{ทวี}] \wedge \forall y (P(\text{ทวี},y) \rightarrow P(x,y)))$

   l) $\exists x \exists u \forall y\ ([x \neq u] \wedge (P(x,y) \leftrightarrow P(u,y)))$

3. ให้ L(x,y) แทนข้อความ “x รัก y” โดยให้เอกภพของตัวแปร x และ y คือเซตของคนทั้งโลก จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์โดยใช้ตัวบ่งปริมาณ:

   a) ทุกคนรักเฉลิมศักดิ์ b) ทุกคนรักคนบางคน

   c) มีคนบางคนที่ทุกคนรัก d) ไม่มีใครรักคนทุกคน

   e) มีคนบางคนที่ทักษิณไม่รัก f) มีคนบางคนที่ไม่มีใครรัก

   g) มีคนเพียงคนเดียวเท่านั้นที่ทุกคนรัก h) มีคนเพียงสองคนเท่านั้นที่กรรณิการ์รัก.

   i) ทุกคนรักตัวเอง j) มีคนบางคนที่ไม่รักใครเลยนอกจากตัวเอง

4. ให้ P(x,y) แทนข้อความ “x+y = x-y”. ถ้าเอกภพของตัวแปรทั้งสองคือเซตจำนวนเต็ม จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้:

   a) $P(1,1)$ b) $P(2,0)$ c) $\forall y\ P(1,y)$

   d) $\exists x\ P(x,2)$ e) $\exists x \exists y\ P(x,y)$ f) $\forall x \exists y\ P(x,y)$

   g) $\exists y \forall x\ P(x,y)$ h) $\forall y \exists x\ P(x,y)$ i) $\forall x \forall y\ P(x,y)$

5. จงเขียนข้อความต่อไปนี้ใหม่ โดยให้เครื่องหมาย ~ ทุกตัวปรากฏอยู่หน้าฟังก์ชันเชิงประพจน์เท่านั้น.

   a) $\sim \forall x \forall y\ P(x,y)$ b) $\sim \forall y \exists x\ P(x,y)$

   c) $\sim \exists y\ (Q(y) \wedge \forall x \sim R(x,y))$ d) $\sim \exists y\ (\exists x\ R(x,y) \vee \forall x\ S(x,y))$

   e) $\sim (\exists x \exists y \sim P(x,y) \wedge \forall x \forall y\ Q(x,y))$ f) $\sim \forall x\ (\exists y \forall z\ P(x,y,z) \wedge \exists z \forall y\ P(x,y,z))$

6. จงพิสูจน์สมมูลเชิงตรรกต่อไปนี้:

   a) $\sim \exists x \forall y\ P(x,y) \Leftrightarrow \forall x \exists y \sim P(x,y)$

   b) $\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$

   c) $\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$

7. ถ้าให้ Q เป็นประพจน์ใดๆ ที่ไม่มีตัวบ่งปริมาณ จงพิสูจน์สมมูลเชิงตรรกต่อไปนี้:

   a) $(\forall x\ P(x)) \vee Q \Leftrightarrow \forall x\ (P(x) \vee Q)$

b) $(\exists x\ P(x)) \vee Q \Leftrightarrow \exists x\ (P(x) \vee Q)$

c) $(\forall x\ P(x)) \wedge Q \Leftrightarrow \forall x\ (P(x) \wedge Q)$

d) $(\exists x\ P(x)) \wedge Q \Leftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge Q)$

8. จงแสดงว่าข้อความ $\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$ กับข้อความ $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$ <u>ไม่</u>สมมูลกันเชิงตรรก.
9. จงแสดงว่าข้อความ $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$ กับข้อความ $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ <u>ไม่</u>สมมูลกันเชิงตรรก.
10. จงพิสูจน์สมมูลเชิงตรรกต่อไปนี้:

    a) $\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x) \Leftrightarrow \forall x \forall y\ (P(x) \vee Q(y))$

    b) $\forall x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x) \Leftrightarrow \forall x \exists y\ (P(x) \wedge Q(y))$

    c) $\forall x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \Leftrightarrow \forall x \exists y\ (P(x) \vee Q(y))$

11. ถ้าเอกภพของตัวแปร x คือเซตจำนวนเต็ม จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้:

    a) $\exists! x\ [x > 1]$ b) $\exists! x\ [x^2 = 1]$

    c) $\exists! x\ [x+3 = 2x]$ d) $\exists! x\ [x = x+1]$

12. ให้ P(x) เป็นฟังก์ชันเชิงประพจน์ โดยเอกภพของตัวแปร x คือ {1, 2, 3}. จงเขียน $\exists! x\ P(x)$ ในรูปของข้อความที่ไม่มีตัวบ่งปริมาณ.
13. จงหาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้:

    a) $\exists! x\ P(x) \rightarrow \exists x\ P(x)$

    b) $\forall x\ P(x) \rightarrow \exists! x\ P(x)$

    c) $\exists! x\ {\sim}P(x) \rightarrow {\sim}\forall x\ P(x)$