418341: สภาพแวดล้อมการทำงานคอมพิวเตอร์กราฟิกส์
การบรรยายครั้งที่ 5

ประมุข ขันเงิน

pramook@gmail.com

3D LINEAR ALGEBRA

เวกเตอร์สามมิติ

- ลำดับของจำนวนจริงสามตัว

$$(x, y, z)$$

- สัญลักษณ์: ตัวอักษรตัวพิมพ์เล็กหนา

$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

- เซตของเวกเตอร์สามมิติ

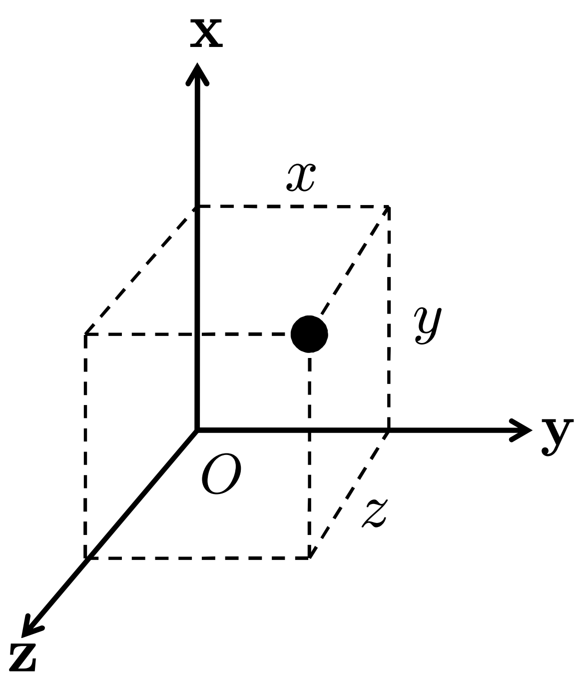
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

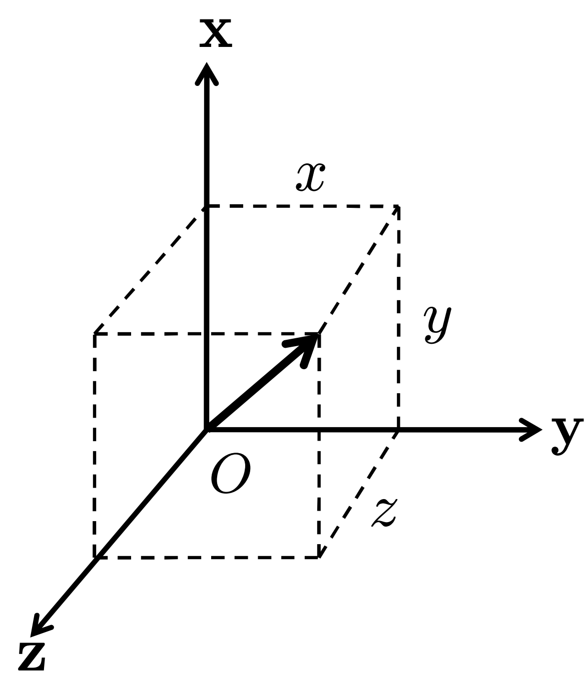
- เวกเตอร์พิเศษ

$$\mathbf{x} = (1, 0, 0),\ \ \mathbf{y} = (0, 1, 0),\ \ \mathbf{z} = (0, 0, 1),\ \ \mathbf{0} = (0, 0, 0)$$

เวกเตอร์สามมิติ (ต่อ)

- ความหมาย
  - จุดในสามมิติ
  - ทิศทางในสามมิติ





ปฏิบัติการบนเวกเตอร์สามมิติ

- กำหนดให้

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (x_1, y_1, z_1) \\ \mathbf{v} &= (x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

- การบวกและลบเวกเตอร์

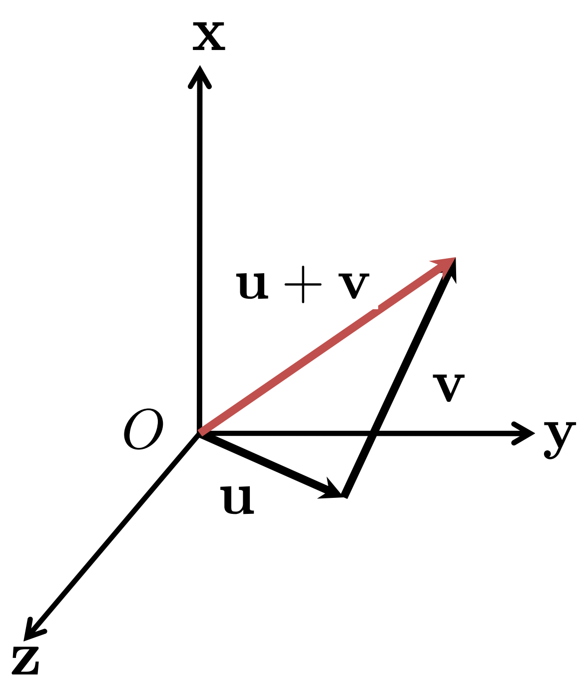
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$$

- การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

$$c\mathbf{u} = (cx_1, cx_2, cx_3)$$

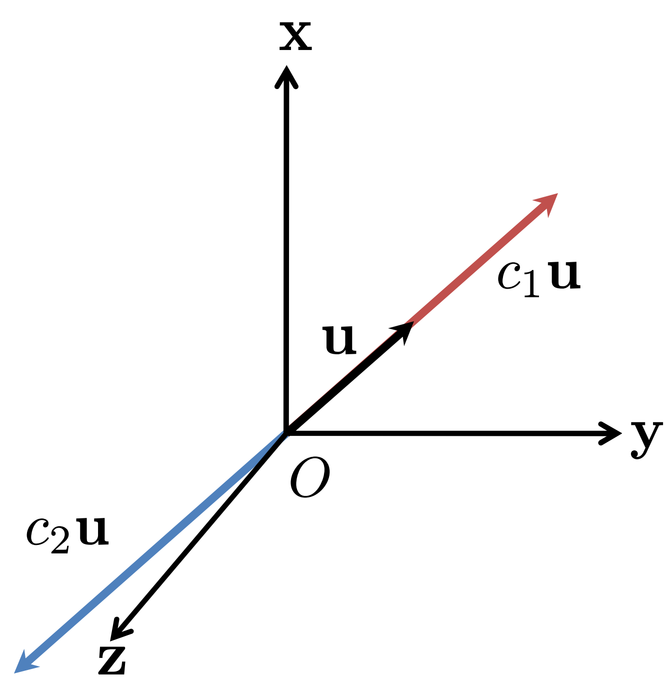
ปฏิบัติการบนเวกเตอร์สามมิติ (ต่อ)

- การบวก = เอาท้ายต่อหัว



ปฏิบัติการบนเวกเตอร์สามมิติ (ต่อ)

- การคูณด้วยสเกลาร์ = การยืด/หด



Linear Combination

- ให้ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ

  และ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ คือจำนวนจริงใดๆ

  เราเรียก

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$$

  ว่า linear combination ของ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$

Linear Combination (ต่อ)

- เวกเตอร์สามมิติทุกเวกเตอร์เป็น linear combination ของ $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, และ $\mathbf{z}$

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z}$$

Span

- ถ้า $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ แล้ว

  เราเรียกเซต

  $$\{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n : c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

  ว่า span ของ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$

Span (ต่อ)

- Span ของ $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, และ $\mathbf{z}$ มีค่าเท่ากับ $\mathbb{R}^3$
- Span ของ $\mathbf{x}$ มีค่าเท่ากับแกน x
- Span ของ $\mathbf{y}$ มีค่าเท่ากับแกน y
- Span ของ $\mathbf{z}$ มีค่าเท่ากับแกน z
- Span ของ $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{y}$ มีค่าเท่ากับระนาบ xy
- Span ของ $\mathbf{x}$ และ $\mathbf{z}$ มีค่าเท่ากับระนาบ xz
- Span ของ $\mathbf{y}$ และ $\mathbf{z}$ มีค่าเท่ากับระนาบ yz

Linear Dependence

- เรากล่าวว่า $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$
  เป็นกลุ่มของเวกเตอร์ที่ linearly dependent
  ถ้ามีสเกลาร์ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ที่มีตัวใดตัวหนึ่งมีค่าไม่เท่ากับ 0
  ที่ทำให้

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Linear Independence

- ตรงข้ามกับ linear dependence
- เรากล่าวว่า $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$

  เป็นกลุ่มของเวกเตอร์ที่ linearly independent

  ถ้าค่า $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ที่ทำให้

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

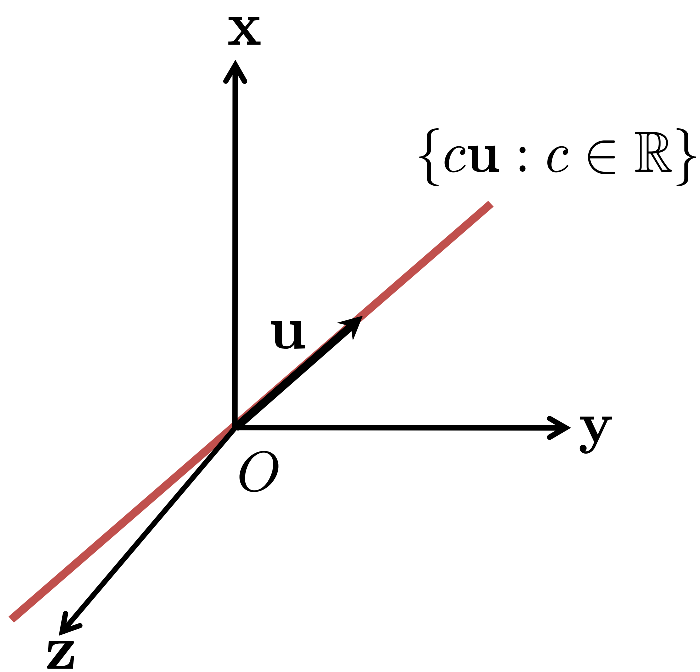
  คือ $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ เท่านั้น

Linear Independence (ต่อ)

- **x**, **y**, และ **z** **---** linearly independent
- (1,2,0) และ (2,4,0) --- linearly dependent
  เพราะ 2*(1,2,0) – (2,4,0) = (0,0,0)
- (1,0,1), (2,3,0), (2,1.5,1) --- linearly dependent
  เพราะ (1,0,1) + 0.5*(2,3,0) – (2,1.5,1) = (0,0,0)
- (0,0,0) --- linearly dependent
  เพราะ c(0,0,0) = (0,0,0) สำหรับค่า c ใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0

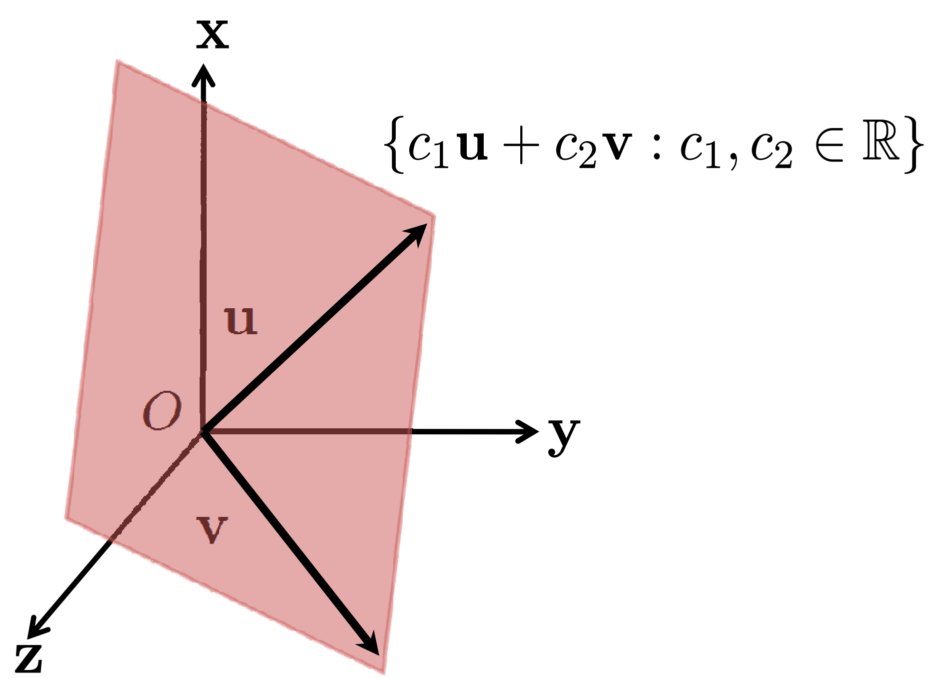
เส้นตรง

- ถ้า $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ แล้ว span ของ $\mathbf{u}$ คือเส้นตรงที่ผ่านจุด O และ $\mathbf{u}$



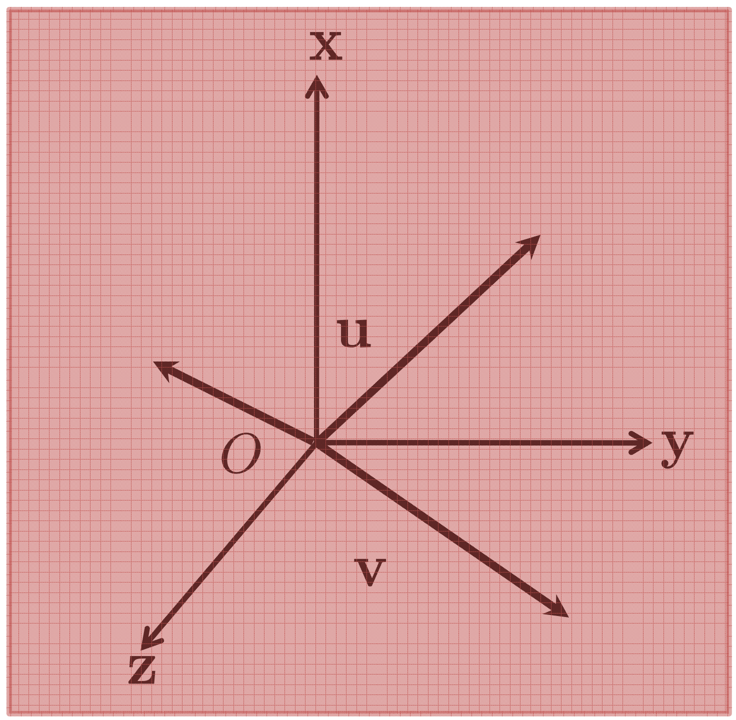
ระนาบ

- ถ้า $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ linearly independent กันแล้ว span ของ $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$ คือระนาบที่ผ่านจุด O, $\mathbf{u}$, และ $\mathbf{v}$



ปริภูมิเวกเตอร์

- ถ้า $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, และ $\mathbf{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่ linearly independent กัน แล้ว span ของ $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, และ $\mathbf{w}$ เซตของเวกเตอร์สามมิติทั้งหมด



$$\{c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} : c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$$

Basis

- ถ้า span ของ **u, v,** และ **w**

  มีค่าเท่ากับเซตของเวกเตอร์สามมิติทั้งหมด

  เราเรียก **u, v,** และ **w** ว่าเป็น basis ของปริภูมิเวกเตอร์สามมิติ

Basis (ต่อ)

- **x**, **y**, และ **z** เป็น basis ของปริภูมิเวกเตอร์สามมิติ
- (1,1,0), (0,1,1), และ (1,0,1) ก็เป็น basis
- แต่ (1,0,1), (2,3,0), (2,1.5,1) ไม่ใช่ เพราะมันไม่ linearly independent

ผลคูณสเกลาร์

- ผลคูณสเกลาร์ (dot product)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

- ขนาดเวกเตอร์

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{\frac{1}{2}}$$

- สมบัติต่างๆ

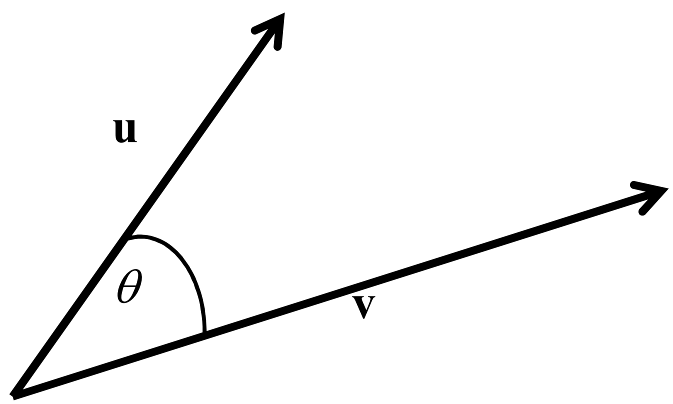
$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \\
\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \\
\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) &= c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\
\|c\mathbf{u}\| &= c\|\mathbf{u}\|
\end{aligned}$$

ผลคูณสเกลาร์ (ต่อ)

- สมบัติ

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

เมื่อ θ คือมุมระหว่าง $\mathbf{u}$ กับ $\mathbf{v}$



- $\mathbf{u}$ กับ $\mathbf{v}$ ตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

- เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 1
- $\|\mathbf{u}\| = 1$
- ถ้า $\mathbf{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยแล้ว

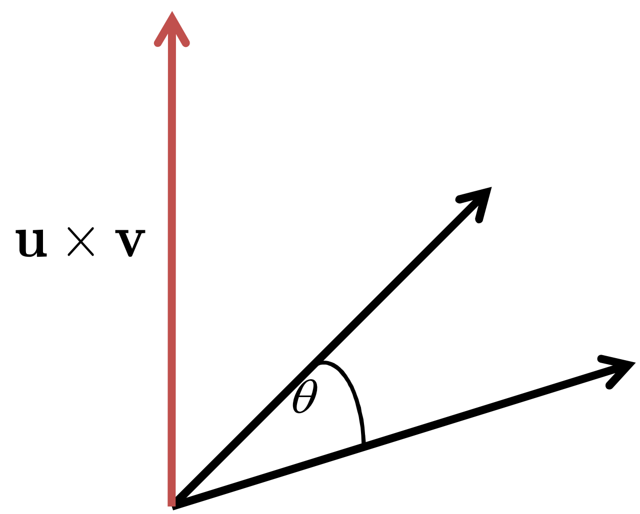
  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cos\theta$ คือความยาวของ $\mathbf{v}$ เมื่อแตกแรงไปในทิศของ $\mathbf{u}$

ผลคูณเวกเตอร์

- ผลคูณเวกเตอร์ (cross product)

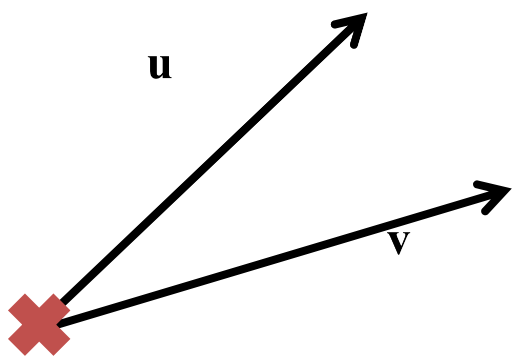
$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (y_1 z_2 - y_2 z_1,\ z_1 x_2 - z_2 x_1,\ x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\mathbf{x} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\mathbf{y} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{z} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ตั้งฉากกับทั้ง $\mathbf{u}$ และ $\mathbf{v}$
- $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta$

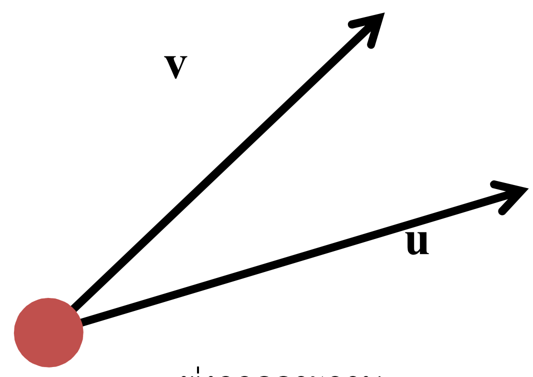


ผลคูณเวกเตอร์ (ต่อ)

- ทิศทางของ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ คิดตาม**กฎมือขวา**
  - เอามือขวาชี้ไปตามทิศของ $\mathbf{u}$ ให้ฝ่ามือหันไปทาง $\mathbf{v}$
  - $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ตั้งฉากกับระนาบที่นิยามโดย $\mathbf{u}$ กับ $\mathbf{v}$ พุ่งออกไปฝั่งที่นิ้วโป้งขวาอยู่



$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ พุ่งเข้ากระดาษ



$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ พุ่งออกกระดาษ

ผลคูณเวกเตอร์ (ต่อ)

- สมบัติต่างๆ

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$

$$\mathbf{u} \times (r\mathbf{v}) = (r\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = r(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

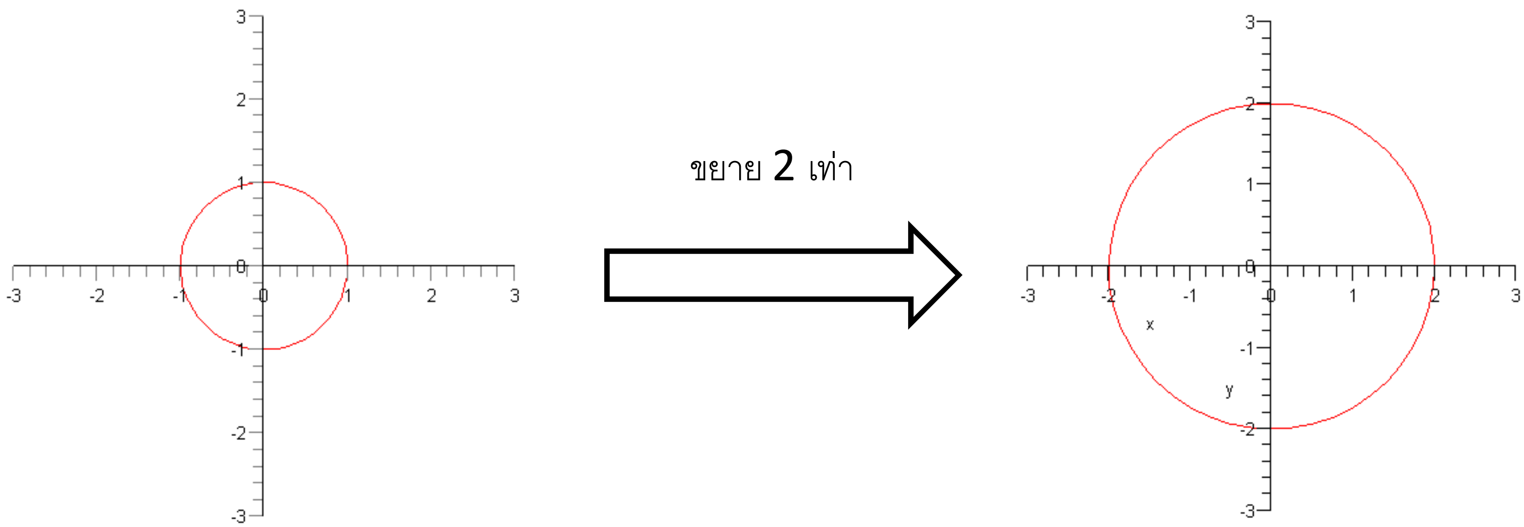
การแปลง

การแปลง (Transformations)

- ตัวอย่าง
  - “เลื่อนไปทางซ้าย 1 หน่วย”
  - “หมุนรอบแกน y 90 องศา”
  - “ขยายขนาดตามแกน z 2 เท่า”
- เอาไปใช้ที่ไหน?
  - Modeling
  - Animation
  - Rendering Pipeline

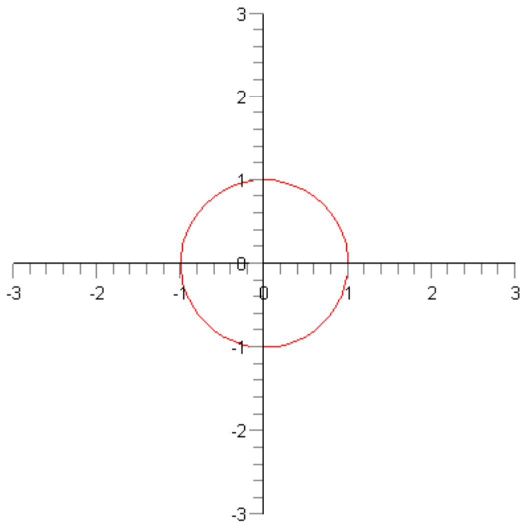
ตัวอย่าง

- สมมติเรารู้วิธีสร้างวงกลมรัศมี 1 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0)
- อยากได้วงกลมรัศมี 2 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่เดิม

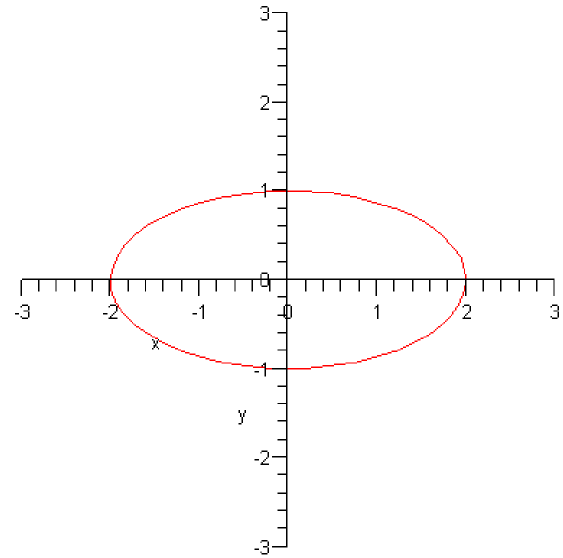


ตัวอย่าง

- อยากได้วงรีแกนเอกยาว 2 หน่วย แกนโทยาว 1 หน่วย

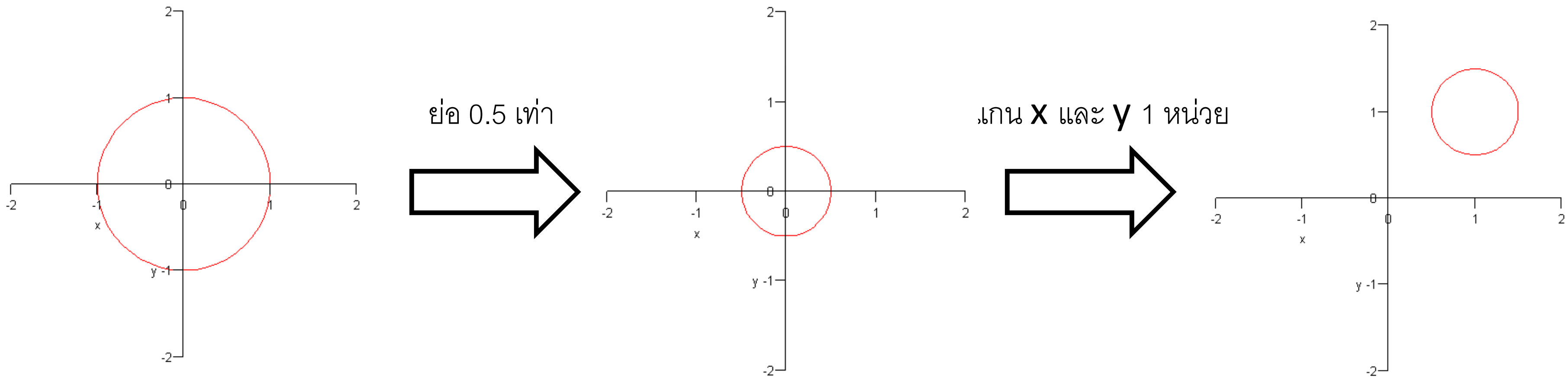


ขยาย 2 เท่าตามแกน **X**



ตัวอย่าง

- อยากได้วงกลมรัศมี 0.5 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (1,1)



การแปลงในสองมิติ

- **การแปลงในสองมิติ** คือ ฟังก์ชันที่ส่งเวกเตอร์ (หรือจุด) สองมิติไปยังเวกเตอร์สองมิติ
  - **สัญลักษณ์:** ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ A, B, C, D, ...
  - **เวลานิยาม:**

ชื่อการแปลง

$$A : (x, y) \mapsto (y, -x)$$

จุดที่ (x,y) ถูกส่งไปหา

หรือจะเขียนแบบฟังก์ชันก็ได้

$$A((x, y)) = (y, -x)$$

ตัวอย่าง

$$B : (x, y) \mapsto (x + 2, y + 3)$$
$$C : (x, y) \mapsto (x + y, 0)$$
$$D : (x, y) \mapsto (1.5x, 3y)$$
$$E : (x, y) \mapsto (x, e^x)$$
$$F : (x, y) \mapsto C(D((x, y)) = (1.5x + 3y, 0)$$

การแปลงเอกลักษณ์

- **การแปลงเอกลักษณ์** (Identity Transformation) คือ การแปลงที่ส่งจุดทุกจุดไปหาตัวมันเอง

$$I : (x, y) \mapsto (x, y)$$

การแปลงเชิงเส้น

- เรากล่าวว่าการแปลง A เป็น**การแปลงเชิงเส้น** (linear transformation) ถ้ามันสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$1.\ \ A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v})$$

$$2.\ \ A(c\mathbf{u}) = cA(\mathbf{u})$$

สำหรับเวกเตอร์ $\mathbf{u},\ \mathbf{v}$ ใดๆ ใน $\mathbb{R}^2$ และค่าคงที่ c ใดๆ

ตัวอย่าง

- การแปลงเอกลักษณ์ I เป็นการแปลงเชิงเส้น เพราะ

  1. $I(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}+\mathbf{v} = I(\mathbf{u}) + I(\mathbf{v})$

  2. $I(c\mathbf{u}) = c\mathbf{u} = cI(\mathbf{u})$

- การแปลง $A : (x, y) \mapsto (y, -x)$ ก็เป็นการแปลงเชิงเส้น
- แต่การแปลง $B : (x, y) \mapsto (x+2, y+3)$ ไม่ใช่การแปลงเชิงเส้น เพราะ

$$B((2,2)) = (4,5) \neq (6,8) = B((1,1)) + B((1,1))$$

ข้อสังเกต

- ถ้า A เป็น linear transformation แล้ว

$$A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

เพราะ $2A(\mathbf{0}) = A(2 \times \mathbf{0}) = A(\mathbf{0})$

การแปลงเชิงเส้นที่สำคัญ 2 ชนิด

- การย่อขยาย (Scaling)
- การหมุน (Rotation)

การย่อขยาย

- **การย่อขยาย (Scaling)** คือการแปลงที่อยู่ในรูป

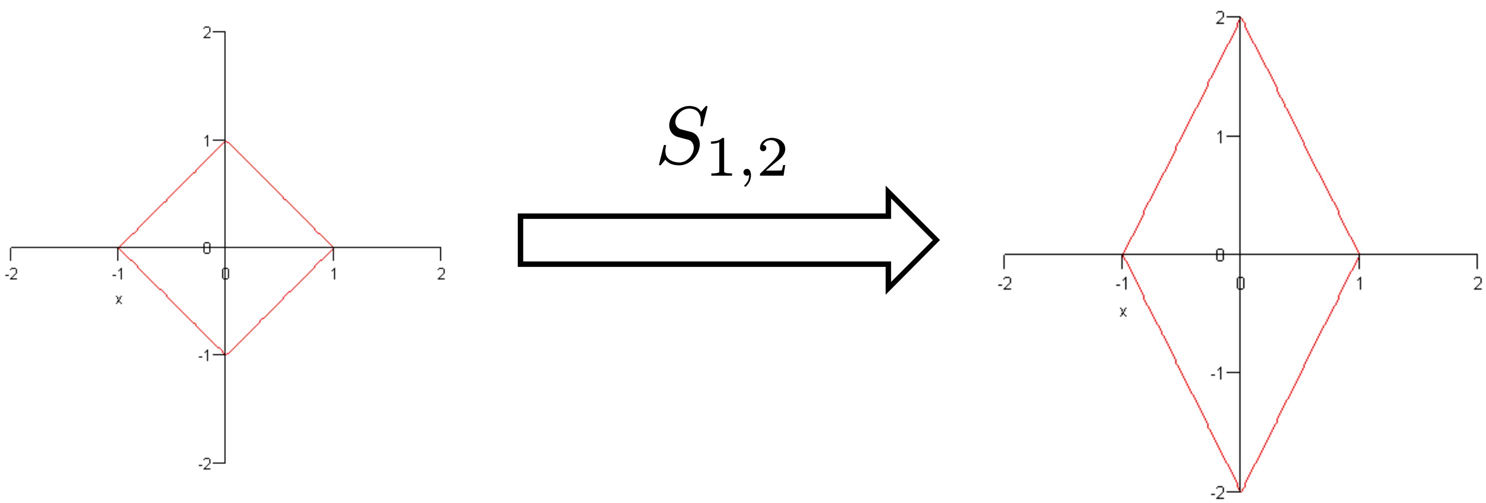
$$S_{\alpha,\beta} : (x, y) \mapsto (\alpha x, \beta y)$$

มีความหมายคือ

  – ขยายในแนวแกน x เป็นจำนวน α เท่า

  – ขยายในแนวแกน y เป็นจำนวน β เท่า

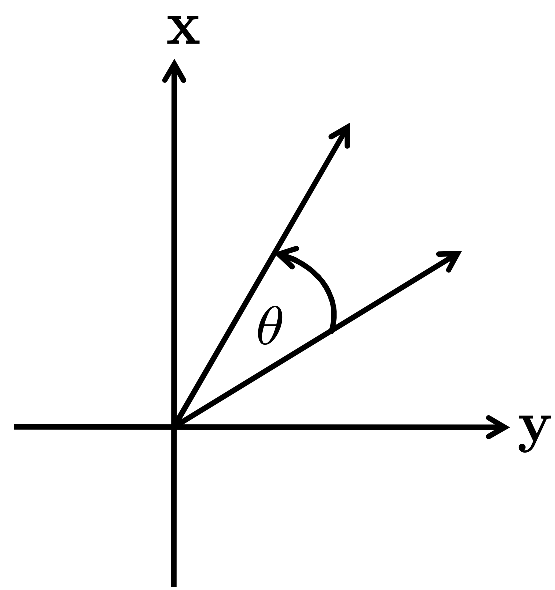
ตัวอย่าง

- เนื่องจาก $S_{1,1}((x,y)) = (1x, 1y) = (x,y)$
  ดังนั้น $S_{1,1} = I$
- $S_{2,2}((1,3)) = (2,6)$
- $S_{1,0.5}((3,10)) = (3,5)$
- 

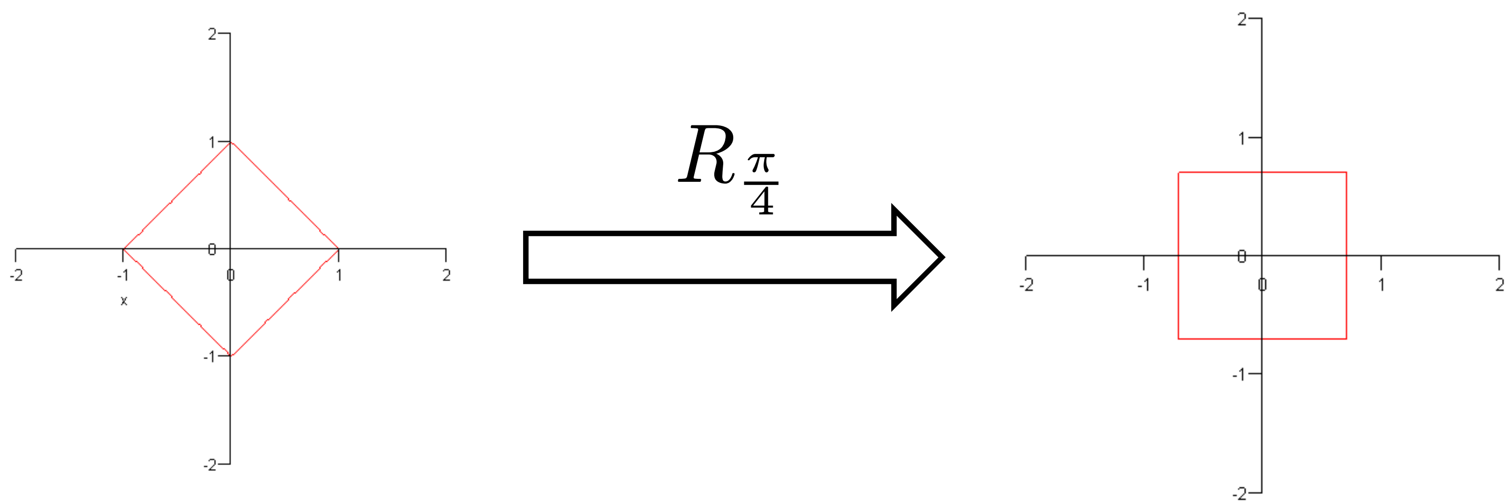
การหมุน

- การหมุน (rotation) ในที่นี้จะต้องกำหนดมุม θ และเราจะหมุนทวนเข็มนาฬิการอบจุด origin ไปเป็นมุม θ
- สัญลักษณ์ R_θ โดย

$$R_\theta : (x, y) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, y\cos\theta + x\sin\theta)$$



ตัวอย่าง

- $I = R_0$ (หมุน 0 เรเดียนเท่ากับไม่หมุนเลย)
- $R_{\frac{\pi}{6}}((1,0)) = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- 

Linear Transformation และ Basis

- ให้ $\mathbf{x} = (1,0)$ และให้ $\mathbf{y} = (0,1)$

  เราได้ว่าสำหรับจุด (x,y) ใดๆ

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x\mathbf{x} + y\mathbf{y}$$

- ถ้า A เป็น linear transformation เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} A((x,y)) &= A(x\mathbf{x} + y\mathbf{y}) \\ &= A(x\mathbf{x}) + A(y\mathbf{y}) \\ &= xA(\mathbf{x}) + yA(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Linear Transformation และ Basis

- กล่าวคือถ้าเรารู้ $A(\mathbf{x})$ และ $A(\mathbf{y})$ เราก็สามารถคำนวณ $A((x,y))$ สำหรับเวกเตอร์ (x,y) ใดๆ ได้ทั้งหมด
- พูดอีกแบบคือ linear transformation จะถูกนิยามด้วยค่าของมันที่ basis ของ vector space

การแทนการแปลงเชิงเส้นด้วยเมตริกซ์

- สมมติว่า $A(\mathbf{x}) = (a,b)$ และ $A(\mathbf{y}) = (c,d)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A((x,y)) &= x(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) + y(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) \\ &= (ax + cy)\mathbf{x} + (bx + dy)\mathbf{y} \\ &= (ax + cy, bx + dy) \end{aligned}$$

การแทนการแปลงเชิงเส้นด้วยเมตริกซ์

- ถ้าเขียนคู่ลำดับ (x,y) ด้วย column vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- ฉะนั้นการแปลงเชิงเส้นสองมิติคือเมตริกซ์ 2x2

การแทนการแปลงเชิงเส้นด้วยเมตริกซ์

- สังเกต

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$A(\mathbf{x})$$

การแทนการแปลงเชิงเส้นด้วยเมตริกซ์

- สังเกต

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$A(\mathbf{y})$$

ตัวอย่าง

- I เป็นการแปลงเชิงเส้น และ $I(\mathbf{x}) = (1,0)$, $I(\mathbf{y}) = (0,1)$

  ดังนั้น

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์เอกลักษณ์

- เนื่องจาก $S_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}) = (\alpha, 0), S_{\alpha,\beta}(\mathbf{y}) = (0, \beta)$

  ดังนั้น

$$S_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

- เนื่องจาก

$$R_\theta(\mathbf{x}) = (\cos\theta, \sin\theta)$$
$$R_\theta(\mathbf{y}) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

ดังนั้น

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

การเลื่อนแกนขนาน

- **การเลื่อนแกนขนาน** (translation) คือ การแปลงที่อยู่ในรูป

$$T_{\mathbf{u}} : \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

มีความหมายคือ ถ้า $\mathbf{u} = (u_1,\, u_2)$ แล้ว

เราจะเลื่อนรูปไปตามแกน x เท่ากับ u_1 หน่วย

และเลื่อนรูปไปตามแกน y เท่ากับ u_2 หน่วย

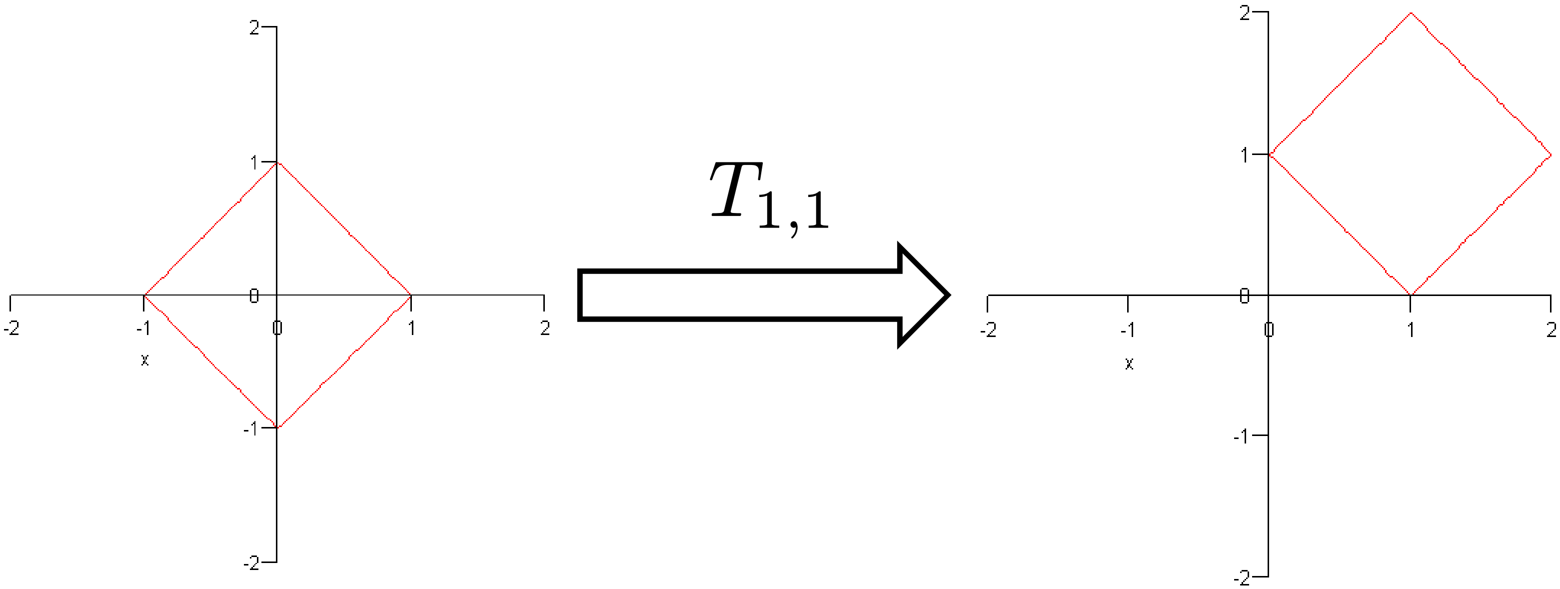
ตัวอย่าง

- I เป็นการเลื่อนแกนขนาน เพราะ $I(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{0}$ ดังนั้น $I = T_{(0,0)}$ (เขียนง่ายๆ ว่า $T_{0,0}$)

- $T_{2,3}\ (0,0) = (2,3)$ ดังนั้น $T_{2,3}$ ไม่ใช่การแปลงเชิงเส้น

- กล่าวคือ ถ้า $\mathbf{u}$ ไม่ใช่ $\mathbf{0}$ แล้ว $T_{\mathbf{u}}$ ไม่เป็นการแปลงเชิงเส้น เนื่องจาก $T_{\mathbf{u}}(\mathbf{0}) = \mathbf{u}$ ซึ่งมีค่าไม่เท่ากับ $\mathbf{0}$

ตัวอย่าง

- 

Composition

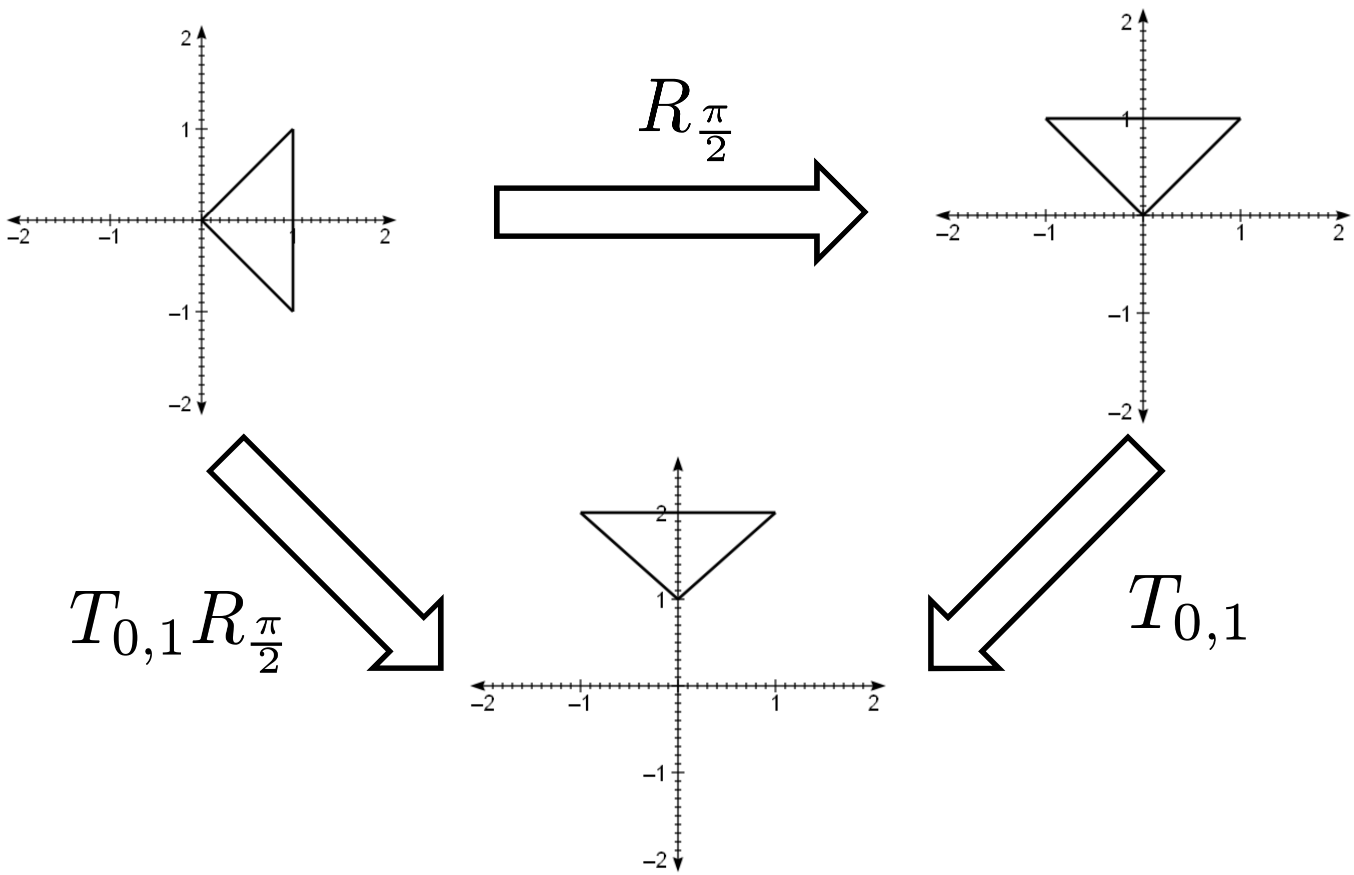
- **Composition** คือการนำเอาการแปลงสองอันมารวมให้เป็นอันเดียววิธีหนึ่ง
- ให้ A กับ B เป็นการแปลง composition ของมันคือการแปลง BA โดยที่

$$BA : (x, y) \mapsto B(A((x, y)))$$

กล่าวคือเป็นการแปลงที่เกิดขึ้นจากการนำเวกเตอร์ข้อมูลเข้าไปแปลงด้วย A ก่อนแล้วจึงแปลงด้วย B

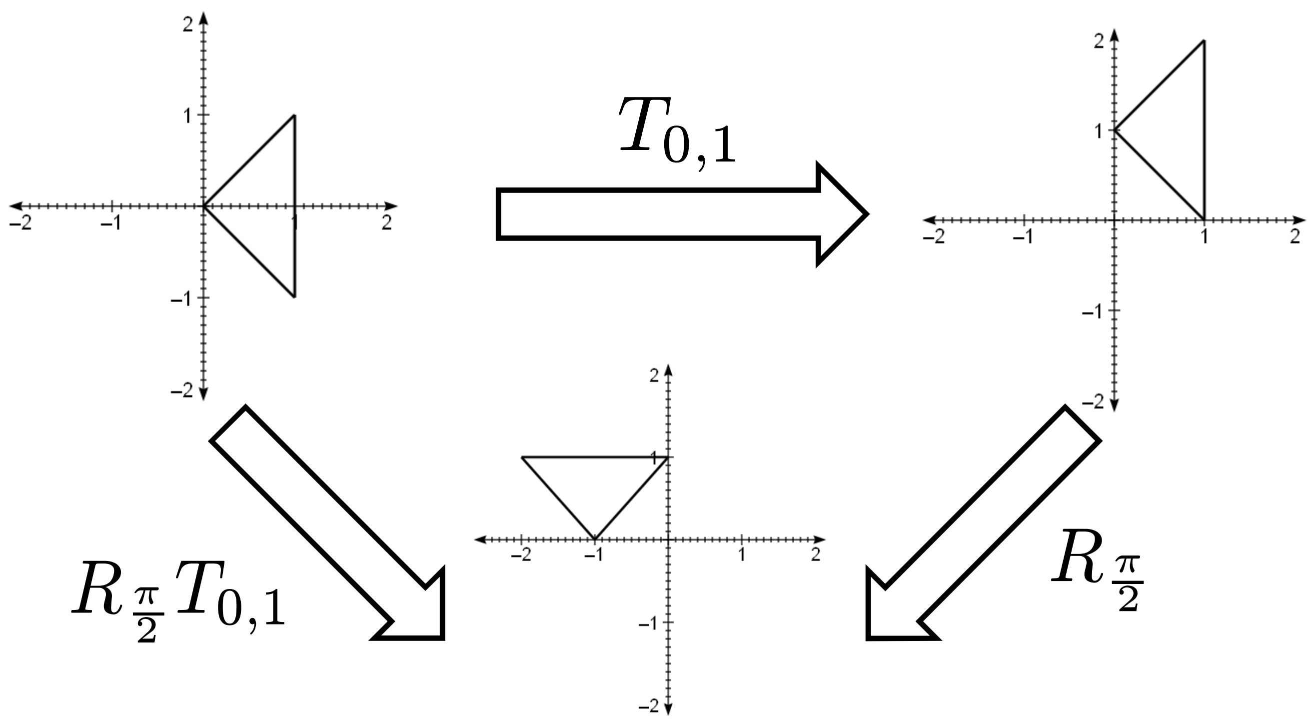
ตัวอย่าง

- $T_{0,1}R_{\frac{\pi}{2}}$ คือการหมุน 90 องศาแล้วเลื่อนทางแกน y หนึ่งหน่วย



ข้อสังเกต

- ถ้า A เป็นการแปลงใดๆ แล้ว $IA = AI = A$
- ระวัง! โดยทั่วไปแล้ว $AB \neq BA$
- ดู $R_{\frac{\pi}{2}}T_{0,1}$



การแปลงแอฟไฟน์

- เรากล่าวว่าการแปลง A เป็น**การแปลงแอฟไฟน์** (affine transformation) ถ้า

$$A = T_{\mathbf{u}} B$$

โดยที่ $T_{\mathbf{u}}$ เป็นการเลื่อนแกนขนานและ B เป็นการแปลงเชิงเส้น

ตัวอย่าง

- I เป็นการแปลงแอฟไฟน์เพราะ $I = T_{0,0}I$
- $T_{0,1}R_{\frac{\pi}{2}}$ เป็นการแปลงแอฟไฟน์ (อย่างเห็นได้ชัด)
- $R_{\frac{\pi}{2}}T_{0,1}$ ก็เป็นการแปลงแอฟไฟน์เชิงเดียวกัน เพราะ

$$\begin{aligned}
R_{\frac{\pi}{2}}T_{0,1}(\mathbf{v}) &= R_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{v} + (0,1)) \\
&= R_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{v}) + R_{\frac{\pi}{2}}((0,1)) \\
&= R_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{v}) + (-1,0) \\
&= T_{-1,0}R_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

ข้อสังเกต

- ถ้า B เป็นการแปลงเชิงเส้นแล้ว $BT_{\mathbf{u}}$ จะเป็นการแปลงแอฟไฟน์เสมอ เนื่องจาก

$$BT_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}+\mathbf{u}) = B(\mathbf{v}) + B(\mathbf{u}) = T_{B(\mathbf{u})}B(\mathbf{v})$$

กล่าวคือ

$$BT_{\mathbf{u}} = T_{B(\mathbf{u})}B$$

ข้อสังเกต

- เราสามารถพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกันว่า ถ้าแต่ละตัวของการแปลง $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ เป็นการเลื่อนแกนขนานหรือการแปลงเชิงเส้นแล้ว การแปลง $A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1$ จะเป็นการแปลงแอฟไฟน์
- ดังนั้นการแปลงแอฟไฟน์จึงเป็นกลุ่มของการแปลงที่รวม
  - การย่อขยาย
  - การหมุน
  - การเลื่อนแกนขนาน
  - การแปลงเชิงเส้น

  เอาไว้ทั้งหมด

Homogeneous Coordinates

- Homogeneous coordinates เป็นวิธีการแทนจุดสองมิติด้วยเวกเตอร์สามมิติแบบหนึ่ง โดยที่

  เวกเตอร์ (x, y, w) หมายถึงจุด $(x/w, y/w)$ ถ้า $w \neq 0$

- ตัวอย่าง
  - $(1, 2, 1)$ หมายถึงจุด $(1, 2)$
  - $(2, 4, 2)$ หมายถึงจุด $(1, 2)$ เช่นเดียวกัน
  - $(w, 2w, w)$ ก็หมายถึงจุด $(1, 2)$ สำหรับค่า w ใดๆ

การแทนการแปลงแอฟไฟน์ด้วยเมตริกซ์

- สมมติว่าเรามีการแปลงแอฟไฟน์ $A = T_{\mathbf{u}}B$ โดยที่

$$B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax + cy + e \\ bx + dy + f \end{bmatrix} \end{aligned}$$

การแทนการแปลงแอฟไฟน์ด้วยเมตริกซ์

- ให้
$$N = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  เมื่อเราคูณ N ด้วย $(x,y,1)$ ซึ่งเป็น homogeneous coordinate ของ (x,y) จะได้ว่า

$$N \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy + e \\ bx + dy + f \\ 1 \end{bmatrix}$$

homogeneous coordinate ของ $A((x,y))$

การแทนการแปลงแอฟไฟน์ด้วยเมตริกซ์

- ฉะนั้น affine transform คือเมตริกซ์ 3x3 ที่แถวล่างเท่ากับ $(0,0,1)$

การแทนการแปลงแอฟไฟน์ด้วยเมตริกซ์

- สังเกต

$$A = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(\mathbf{x}) - \mathbf{u} = B(\mathbf{x})$$

การแทนการแปลงแอฟไฟน์ด้วยเมตริกซ์

- สังเกต

$$A = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(\mathbf{y}) - \mathbf{u} = B(\mathbf{y})$$

การแทนการแปลงแอฟไฟน์ด้วยเมตริกซ์

- สังเกต

$$A = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = A(\mathbf{0})$$

ตัวอย่าง

- $T_{0,1}R_{\frac{\pi}{2}}((0,0)) = (0,1)$
- $T_{0,1}R_{\frac{\pi}{2}}((1,0)) - (0,1) = (0,2) - (0,1) = (0,1)$
- $T_{0,1}R_{\frac{\pi}{2}}((0,1)) - (0,1) = (-1,1) - (0,1) = (-1,0)$
- ดังนั้น

$$T_{0,1}R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ของการแปลงแอฟไฟน์ที่สำคัญ

$$S_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composition และเมตริกซ์

- Composition คือการคูณเมตริกซ์
- ตัวอย่าง

$$T_{0,1}R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

การแปลงผันกลับ

- **การแปลงผันกลับ (inverse)** ของการแปลง A คือการแปลง A^{-1} ที่ทำให้

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- การแปลงบางตัวไม่มี inverse เช่น $A : (x, y) \mapsto (x, 0)$
- การแปลงแอฟไฟน์ A จะมี inverse ก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ของ A มี inverse พูดอีกนัยหนึ่งคือ $\det(A) \neq 0$

การแปลงผันกลับของการแปลงแอฟไฟน์ที่สำคัญ

$$(S_{\alpha,\beta})^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S_{\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}}$$

$$(T_{\mathbf{u}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -u_1 \\ 0 & 1 & -u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_{-\mathbf{u}}$$

การแปลงผันกลับของการแปลงแอฟไฟน์ที่สำคัญ

$$
\begin{aligned}
\left(R_\theta\right)^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_{-\theta}
\end{aligned}
$$