418341 สภาพแวดล้อมการทำงานคอมพิวเตอร์กราฟิกส์
การบรรยายครั้งที่ 25

pramook@gmail.com

เมตริกซ์ของการแปลง

- เมตริกซ์ของการเลื่อนแกนขนานคือ

$$T_{a,b,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- เมตริกซ์ของการย่อขยายขนาดคือ

$$S_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ของการเลื่อนแกนขนาน

- เมื่อนำเมตริกซ์ของการเลื่อนแกนขนานมาคูณกับ homogeneous coordinate ของจุด

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{bmatrix}$$

- แต่เมื่อนำมันมาคูณกับ homogeneous coordinate ของเวกเตอร์ จะไม่มีอะไรเกิดขึ้น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ของการเลื่อนแกนขนาน

- เมื่อนำเมตริกซ์ของการเลื่อนแกนขนานไปคูณกับเมตริกซ์ของ affine transformation อื่นๆ
- ให้เอาการกระจัดของการเลื่อนแกนขนานไปบวกกับคอลัมน์ที่สี่

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}+a \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}+b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}+c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ของการย่อขยายขนาด

- เมื่อเรานำเมตริกซ์ของการย่อขยายขนาดไปคูณกับ homogeneous coordinate แล้วผลลัพธ์ที่ได้คือ
  - เอา α ไปคูณกับค่า x
  - เอา β ไปคูณกับค่า y
  - เอา γ ไปคูณกับค่า z

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \beta y \\ \gamma z \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ของการย่อขยายขนาด

- เมื่อเรานำเมตริกซ์ของการย่อขยายขยาดไปคูณกับเมตริกซ์อื่นๆ **ทางด้านซ้าย** ผลลัพธ์ที่ได้คือ
  - เอา α ไปคูณแถวที่ 1
  - เอา β ไปคูณแถวที่ 2
  - เอา γ ไปคูณแถวที่ 3

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \alpha a_{14} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} & \beta a_{23} & \beta a_{24} \\ \gamma a_{31} & \gamma a_{32} & \gamma a_{33} & \gamma a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

- จงคำนวณ

$$\begin{bmatrix}5&0&0&2\\0&3&0&4\\0&0&7&8\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}5&0&0&2\\0&3&0&4\\0&0&7&8\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&4\\0&0&1&8\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&4\\0&0&1&8\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&10&15&20\\15&18&21&24\\63&70&77&84\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}5&10&15&22\\15&18&21&28\\63&70&77&92\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

เมตริกซ์ของการย่อขยายขนาด

- เมื่อเรานำเมตริกซ์ของการย่อขยายขยาดไปคูณกับเมตริกซ์อื่นๆ **ทางด้านขวา** ผลลัพธ์ที่ได้คือ
  - เอา α ไปคูณคอลัมน์ที่ 1
  - เอา β ไปคูณคอลัมน์ที่ 2
  - เอา γ ไปคูณคอลัมน์ที่ 3

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&0&0&0\\0&\beta&0&0\\0&0&\gamma&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a_{11}&\beta a_{12}&\gamma a_{13}&a_{14}\\\alpha a_{21}&\beta a_{22}&\gamma a_{23}&a_{24}\\\alpha a_{31}&\beta a_{32}&\gamma a_{33}&a_{34}\\\alpha a_{41}&\beta a_{42}&\gamma a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

- จงคำนวณ

$$\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&5\\0&0&1&6\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&5\\0&0&1&6\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&5\\0&0&1&6\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0\\\frac{5\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0&2\\\frac{5\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0&5\\0&0&2&6\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

คูณการหมุนกับการเลื่อนแกนขนาน

- เราเคยเรียนในชั้นเรียนว่า

$$RT_{\mathbf{v}} = T_{R\mathbf{v}}R$$

เมื่อ

R คือเมตริกซ์ของการหมุน

$T_{\mathbf{v}}$ คือเมตริกซ์ของการเลื่อนแกนขนานไปตามทิศทางของเวกเตอร์ **v**

ตัวอย่าง

- จงคำนวณ

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&8&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&8&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= S_{1,2,8}R_{45^\circ,0,0,1}T_{1,1,1}$$

$$= S_{1,2,8}T_{0,\sqrt{2},1}R_{45^\circ,0,0,1}$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&8&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&\sqrt{2}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&0\\\sqrt{2}&\sqrt{2}&0&2\sqrt{2}\\0&0&8&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

การคำนวณ inverse

- Inverse ของการแปลง affine สำคัญๆ มีดังนี้

$$T^{-1}_{a,b,c} = T_{-a,-b,-c}$$

$$S_{\alpha,\beta,\gamma} = S_{\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}}$$

$$R_{\theta,x,y,z} = R_{-\theta,x,y,z}$$

- นอกจากนี้ เรายังรู้ว่า

$$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}$$

ตัวอย่าง

- จงคำนวณ

$$\begin{bmatrix}\frac{5\sqrt{3}}{2}&\frac{-3}{2}&0&0\\\frac{5}{2}&\frac{3\sqrt{3}}{2}&0&1\\0&0&7&5\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

ตัวอย่าง

$$\begin{bmatrix}\frac{5\sqrt{3}}{2}&\frac{-3}{2}&0&0\\\frac{5}{2}&\frac{3\sqrt{3}}{2}&0&1\\0&0&7&5\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{-1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{-1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

ตัวอย่าง

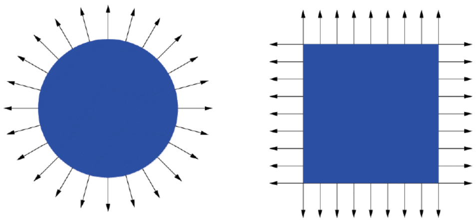
$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{7}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{-1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-5\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&\frac{1}{7}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{-1}{2}\\0&1&0&\frac{-\sqrt{3}}{2}\\0&0&1&-5\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{-1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{10}&\frac{1}{10}&0&\frac{-1}{10}\\\frac{-1}{6}&\frac{\sqrt{3}}{6}&0&\frac{-\sqrt{3}}{6}\\0&0&1&\frac{-5}{7}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

เวกเตอร์ตั้งฉาก

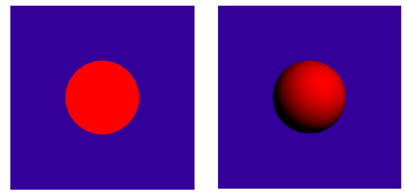
- เวกเตอร์ตั้งฉาก = เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับผิววัตถุที่จุดตัด



รูปจาก Durand and Culter, *Transformation in Ray Tracing*. http://ocw.mit.edu

เวกเตอร์ตั้งฉาก (ต่อ)

- เวกเตอร์ตั้งฉากเป็นข้อมูลสำคัญในการให้สี
- ช่วยให้วัตถุดูเป็นสามมิติขึ้นมา



รูปจาก Durand and Culter, *Transformation in Ray Tracing*. http://ocw.mit.edu

เวกเตอร์ตั้งฉาก (ต่อ)

- นอกจากนี้ ยังเป็นตัวบอกเวลาเราอยู่ในหรือนอกวัตถุ
- เรากำหนดให้เวกเตอร์ตั้งฉากพุ่งออกนอกวัตถุเสมอ
- การรู้ด้านในด้านนอกเป็นประโยชน์เวลาจำลองการหักเหของแสง
- แค่เช็คมุมของทางเดินแสงกับเวกเตอร์ตั้งฉากก็จะรู้ได้ว่าแสงกำลังจะออกหรือเข้าไปในวัตถุ
- สังเกตว่าถ้ากลับทิศเวกเตอร์ตั้งฉาก เราจะกลับด้านในด้านนอกของวัตถุ

หาเวกเตอร์ตั้งฉาก

- เพื่อความง่าย เรามาคิดถึงการหาเวกเตอร์ตั้งฉากใน object space กันก่อน
- เพื่อความสะดวก เวกเตอร์ตั้งฉากจะเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเสมอ

เวกเตอร์ตั้งฉากของสี่เหลี่ยม

- เรานิยามสี่เหลี่ยมว่าเป็นเซต $\{(x,y,0) : -1 \le x, y \le 1\}$
- กล่าวคือมันขนานกับระนาบ xy
- มีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบ xy สองตัว
  - (0,0,1)
  - (0,0,-1)
- เราเลือกให้ (0,0,1) เป็นเวกเตอร์ตั้งฉาก

เวกเตอร์ตั้งฉากของสามเหลี่ยม

- เรานิยมนิยามสามเหลี่ยมโดยให้จุดมุมทั้งสามเรียงกัน**ทวนเข็มนาฬิกา**
- กล่าวคือ ถ้าเดินจากจุด $\mathbf{p}_1$ ไป $\mathbf{p}_2$ ไป $\mathbf{p}_3$ เราจะเดินวนซ้าย
- เวกเตอร์ตั้งฉากกับเวกเตอร์สามเหลี่ยมนิยามโดยใช้กฎมือขวา
  - เมื่อใช้มือขวาวัดจาก $\mathbf{p}_1$ ไป $\mathbf{p}_2$ ไป $\mathbf{p}_3$ แล้วเวกเตอร์ตั้งฉากจะชี้ไปทางด้านที่นิ้วโป้งอยู่
- พูดเป็นภาษาคณิตศาสตร์คือ

$$\mathbf{n} = \textsc{Normalize}((\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1))$$

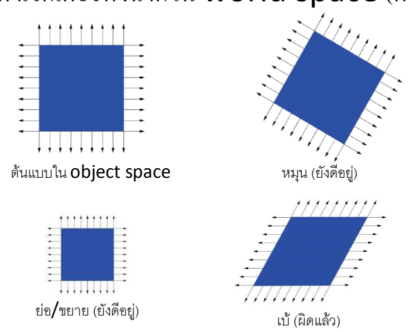
เวกเตอร์ตั้งฉากของทรงกลม

- ใน object space วงกลมของเราเป็นวงกลมหนึ่งหน่วย
- เรากำหนดให้เวกเตอร์ตั้งฉากพุ่งออกนอกวงกลม
- เวกเตอร์ตั้งฉากคือ**เวกเตอร์จากจุดศูนย์กลางไปหาจุดบนพื้นผิว**
- พูดง่ายๆ คือ มันมีค่าเท่ากับจุดบนพื้นผิวนั่นเอง (เพราะจุดศูนย์กลางมีพิกัด (0,0,0))

หาเวกเตอร์ตั้งฉากใน world space

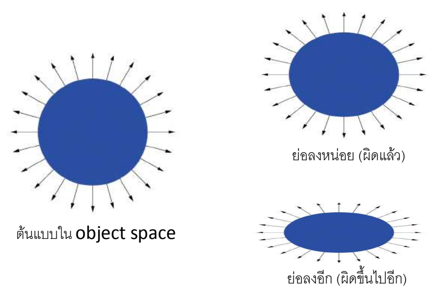
- เมื่อได้เวกเตอร์ตั้งฉากใน object space มาแล้ว เราจะต้องแปลงให้มันอยู่ใน world space
- สมมติว่าการแปลง M เป็นการแปลงจาก object space ไป world space
- เราจะแปลงเวกเตอร์ตั้งฉากอย่างไร?
- ก็แปลงมันเหมือนเวกเตอร์ธรรมดาไม่ได้เหรอ?
- มาดูกันสักหน่อย

หาเวกเตอร์ตั้งฉากใน world space (ต่อ)



รูปจาก Durand and Culter, *Transformation in Ray Tracing*. http://ocw.mit.edu

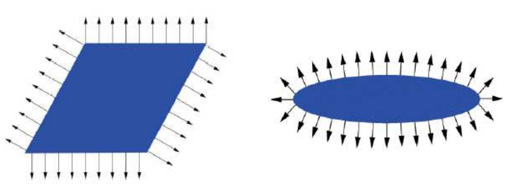
หาเวกเตอร์ตั้งฉากใน world space (ต่อ)



รูปจาก Durand and Culter, *Transformation in Ray Tracing*. http://ocw.mit.edu

หาเวกเตอร์ตั้งฉากใน world space (ต่อ)

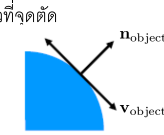
- สิ่งที่เราต้องการ



รูปจาก Durand and Culter, *Transformation in Ray Tracing*. http://ocw.mit.edu

หาเวกเตอร์ตั้งฉากใน world space (ต่อ)

- แทนที่จะคิดว่าจะแปลงเวกเตอร์ตั้งฉาก ลองคิดถึงการเวกเตอร์ในระนาบที่ขนานกับพื้นผิวที่จุดตัด



- ให้ $\mathbf{v}_{\text{object}}$ เป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในระนาบขนานพื้นผิว

หาเวกเตอร์ตั้งฉากใน world space (ต่อ)

- เราได้ว่าเราสามารถแปลง $\mathbf{v}_{\text{object}}$ ให้อยู่ใน world space เหมือนกับการแปลงเวกเตอร์ทั่วไป

$$\mathbf{v}_{\text{world}} = M\mathbf{v}_{\text{object}}$$

หาเวกเตอร์ตั้งฉากใน world space (ต่อ)

- เนื่องจากเวกเตอร์ตั้งฉาก $\mathbf{n}_{\text{world}}$ จะต้องตั้งฉากกับ $\mathbf{v}_{\text{world}}$ เราได้ว่า

$$\mathbf{v}_{\text{world}} \cdot \mathbf{n}_{\text{world}} = (\mathbf{v}_{\text{world}})^T \mathbf{n}_{\text{world}} = 0$$

แต่

$$\mathbf{v}_{\text{world}} = M\mathbf{v}_{\text{object}}$$

ฉะนั้น

$$\mathbf{v}_{\text{object}}^T M^T \mathbf{n}_{\text{world}} = 0$$

หาเวกเตอร์ตั้งฉากใน world space (ต่อ)

- ถ้าเราให้

$$\boxed{\mathbf{n}_{\text{world}} = (M^{-1})^T \mathbf{n}_{\text{object}}}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\text{object}}^T M^T \mathbf{n}_{\text{world}} &= \mathbf{v}_{\text{world}}^T M^T (M^{-1})^T \mathbf{n}_{\text{object}} \\ &= \mathbf{v}_{\text{object}}^T \mathbf{n}_{\text{object}} = 0\end{aligned}$$

สูตรข้างบนใช้ได้

หาเวกเตอร์ตั้งฉากใน world space (ต่อ)

- สรุป
  - ถ้ามีการแปลงวัตถุจาก object space ไปยัง world space ด้วยเมตริกซ์ M
  - เราแปลงจุดด้วยเมตริกซ์ M
  - แต่เราต้องแปลงเวกเตอร์ตั้งฉากด้วย **inverse transpose ของ M**

ตัวอย่าง

- สมมติว่าเราวาดสามเหลี่ยมหนึ่งรูปด้วยคำสั่งต่อไปนี้

```
glBegin(GL_TRIANGLE);
glVertex3f(1, 0, 0);
glVertex3f(0, 1, 0);
glVertex2f(0, 0, 1);
glEnd(GL_TRIANGLE);
```

แล้วเวกเตอร์ตั้งฉากของสามเหลี่ยมรูปนี้คืออะไร?

ตัวอย่าง

- เราได้ว่า

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

- ฉะนั้น

$$\mathbf{n} = \text{normalize}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \text{normalize}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

- สมมติว่าสามเหลี่ยมรูปที่แล้วถูกแปลงให้จาก object space ไปเป็น world space ด้วยการแปลงดังต่อไปนี้

```
glLoadIdentity();
glScale(1,2,3);
glTranslate(4,5,6);
glBegin(GL_TRIANGLE);
glVertex3f(1, 0, 0);
glVertex3f(0, 1, 0);
glVertex2f(0, 0, 1);
glEnd(GL_TRIANGLE);
```

- แล้วเวกเตอร์ตั้งฉากของสามเหลี่ยมนี้ใน world space มีค่าเท่าไหร่?

ตัวอย่าง

- เมตริกซ์ของการแปลงคือ

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&4\\0&1&0&5\\0&0&1&6\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

- อินเวอร์สของมันคือ

$$\begin{bmatrix}1&0&0&-4\\0&1&0&-5\\0&0&1&-6\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&-4\\0&\frac{1}{2}&0&-5\\0&0&\frac{1}{3}&-6\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

- Inverse transpose ของมันคือ

$$\begin{bmatrix}1&0&0&-4\\0&\frac{1}{2}&0&-5\\0&0&\frac{1}{3}&-6\\0&0&0&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\-4&-5&-6&1\end{bmatrix}$$

- ฉะนั้น homogeneous coordinate ของ normal ใน world space คือ

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\-4&-5&-6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/2\sqrt{3}\\-1/3\sqrt{3}\\ *\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

- เราไม่ต้องสนใจสมาชิกในแถวที่ 4 ของ homogeneous coordinate เพราะ normal เป็นเวกเตอร์
- normal คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ

$$\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/2\sqrt{3}\\-1/3\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

- เวกเตอร์นี้มีขนาด $\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{6}}$ ฉะนั้น normal จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/2\sqrt{3}\\-1/3\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\sqrt{2}/\sqrt{7}\\-3\sqrt{2}/2\sqrt{7}\\-\sqrt{2}/\sqrt{7}\end{bmatrix}$$

ควอเทอเนียน

- ควอเทอเนียนที่แทนการหมุนเป็นมุม θ รอบแกน (x,y,z) คือ

$$\left\langle \cos\frac{\theta}{2}; x\sin\frac{\theta}{2}, y\sin\frac{\theta}{2}, z\sin\frac{\theta}{2}\right\rangle$$

- ระวังว่า (x,y,z) ต้องเป็น**เวกเตอร์หนึ่งหน่วย**

ตัวอย่าง

- จงหาควอเทอเนียนที่แทนการหมุนเป็นมุม 60 องศารอบแกน (1,1,1)
  - เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของแกนคือ $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$
  - คำนวณค่า cos และ sin

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

  - และจะได้ว่าควอเทอเนียนคือ

$$\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right\rangle$$

ตัวอย่าง

- ควอเทอเนียนต่อไปนี้แทนการหมุนกี่องศา รอบแกนอะไร?

$$\left\langle \frac{1}{2}; 0, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4} \right\rangle$$

  - เราได้ว่า $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$
  - ฉะนั้น $\theta = 120^\circ$
  - แกนที่หมุนรอบคือ

$$\frac{1}{\sin 60^\circ}\left(0, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(0, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right) = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

การคูณควอเทอเนียน

- **หลีกเลี่ยงการคูณควอเทอเนียนตรงๆ**
- เพราะการคำนวณยุ่งยากและมีสิทธิ์ผิดมาก
- ใช้ความเข้าใจความหมายของควอเทอเนียนทำการคำนวณดีกว่า

ตัวอย่าง

- ให้

$$q_1 = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{10}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{5} \right\rangle$$
$$q_2 = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{10}, 0, \frac{2}{5} \right\rangle$$

จงคำนวณ $q_1 q_2$

ตัวอย่าง

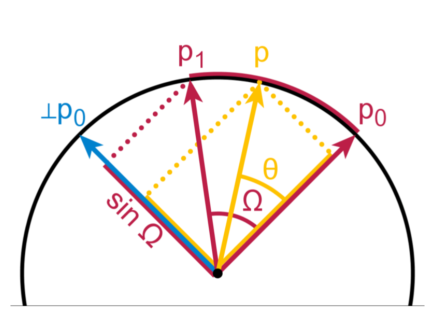
- q_1 คือการหมุนเป็นมุม 90 องศา รอบแกน (3/5, 0, 4/5)
- q_2 คือการหมุนเป็นมุม 60 องศา รอบแกน (3/5, 0, 4/5)
- ฉะนั้น q_1q_2 คือการหมุนเป็นมุม 60 องศาแล้วจึงหมุน 90 องศา
- รวมแล้วเป็นการหมุน 150 องศารอบแกน (3/5, 0, 4/5)
- ฉะนั้น

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= \left\langle \cos 75^\circ; \frac{3}{5}\sin 75^\circ, 0, \frac{4}{5}\sin 75^\circ \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}; \frac{3+3\sqrt{3}}{10\sqrt{2}}, 0, \frac{4+4\sqrt{3}}{10\sqrt{2}} \right\rangle \end{aligned}$$

Slerp

- อย่าคำนวณ slerp โดยตรงเช่นกัน
- สมมติว่าเราจะคำนวณ slerp(q_0,q_1,α) โดยให้ค่า α มีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จาก 0 ถึง 1 ถ้าเรา plot quaternion ค่าต่างๆ ที่เกิดขึ้น เราจะได้ว่ามันเรียงตัวกันเป็นเส้น geodesic ซึ่งคือเส้นบนทรงกลม 4 มิติที่สั้นที่สุดที่ผ่าน q_0 และ q_1
- ค่า α เป็นตัวบอกตำแหน่งบนเส้น geodesic นี้ กล่าวคือ
  - ถ้า $\alpha = 0$ จะอยู่ที่ q_0
  - ถ้า $\alpha = 1$ จะอยู่ที่ q_1
  - ถ้า $\alpha = 0.5$ จะอยู่ตรงกลางระหว่าง q_0 กับ q_1 พอดี
  - ฯลฯ

Slerp



ตัวอย่าง

- ให้

$$q_1 = \left\langle 1; 0, 0, 0 \right\rangle$$
$$q_2 = \left\langle 0; 0, 1, 0 \right\rangle$$

จงคำนวณ $\mathrm{slerp}(q_0, q_1, 1/3)$

ตัวอย่าง

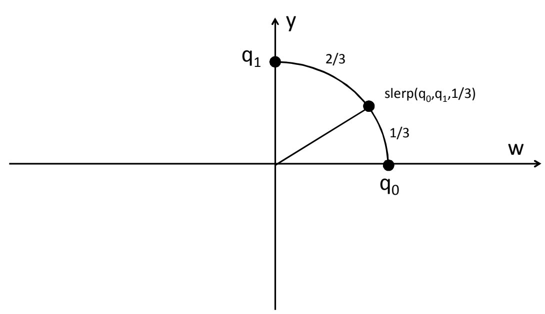
- สังเกตว่า x component และ z component เป็น 0
- ดังนั้นที่ผลลัพธ์ x และ z ก็จะต้องมีค่าเป็น 0 ด้วย เนื่องจากเส้น geodesic จะไม่ผ่านบริเวณที่ x และ z ไม่เป็น 0 (ถ้าผ่านมันจะไม่สั้นสุด)
- ดังนั้นเราสามารถคิดว่าเส้น geodesic เป็นเส้นรอบวงของวงกลมใน 2 มิติ โดยที่แกนของระนาบสองมิตินั้นคือแกน w และแกน y

ตัวอย่าง

- มุมระหว่าง q_0 และ q_1 คือ 90 องศา
- slerp(q_0,q_1,1/3) คือตำแหน่งที่ทำมุมกับ q_0 เป็น 1/3 เท่าของมุม 90 องศา กล่าวคือทำมุม 30 องศากับ q_0
- ฉะนั้น slerp(q_0,q_1,1/3) จึงมีพิกัด (w,y) เท่ากับ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- กล่าวคือ

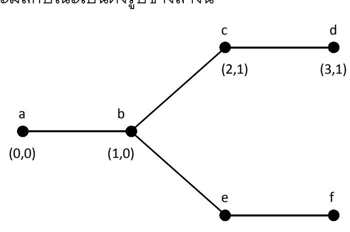
$$\mathrm{slerp}(q_0, q_1, 1/3) = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}; 0, \frac{1}{2}, 0 \right\rangle$$

ตัวอย่าง



Articulated Rigid Body

- เรามาลองดูตัวอย่างปัญหา forward kinematics กันสักข้อ
- สมมติว่า articulated rigid body อันหนึ่ง เมื่อมันอยู่ใน rest post จะมีลักษณะเป็นดังรูปข้างล่างนี้

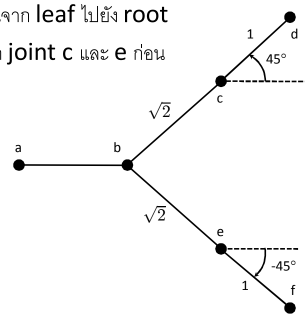


Articulated Rigid Body

- สมมติว่าให้ joint a เป็น root joint
- และให้ที่แต่ละ joint สามารถหมุนรอบแกน z ได้เท่านั้น
- กำหนดท่า $\theta_a = 90°$, $\theta_b = 45°$, $\theta_c = 45°$, $\theta_e = -45°$
- แล้ว joint ต่างๆ อยู่ที่ตำแหน่งใดบ้าง?

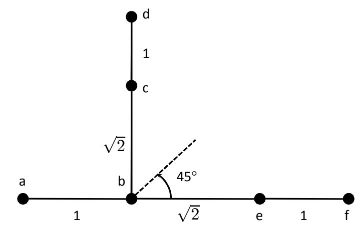
Articulated Rigid Body

- ให้หมุนจาก leaf ไปยัง root
- เริ่มจาก joint c และ e ก่อน



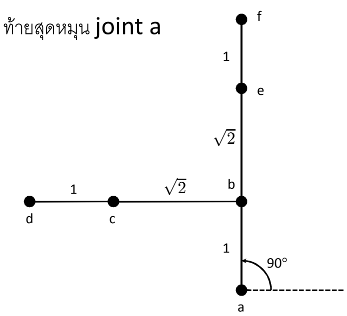
Articulated Rigid Body

- หลังจากนั้นหมุน joint b



Articulated Rigid Body

- ท้ายสุดหมุน joint a



Articulated Rigid Body

- ฉะนั้นเราจะได้ว่า
  - joint a อยู่ที่ตำแหน่ง (0,0)
  - joint b อยู่ที่ตำแหน่ง (1,0)
  - joint c อยู่ที่ตำแหน่ง $(-\sqrt{2}, 1)$
  - joint d อยู่ที่ตำแหน่ง $(-\sqrt{2} - 1, 1)$
  - joint e อยู่ที่ตำแหน่ง $(0, 1 + \sqrt{2})$
  - joint f อยู่ที่ตำแหน่ง $(0, 2 + \sqrt{2})$