ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

418531: โครงสร้างข้อมูลและการวิเคราะห์อัลกอริทึม

ภาคต้น 2552

วันที่ 25 มิถุนายน 2552 เวลา 18.00 น. – 20.00 น.

ข้อสอบย่อยครั้งที่ 1

ชื่อ _____ รหัส _____

1. ข้อสอบนี้มีทั้งหมด 10 หน้า
2. เวลาทำข้อสอบ**สองชั่วโมง**
3. ข้อสอบนี้อนุญาตให้เปิดหนังสือและชีทได้
4. เขียนคำตอบลายมือสวยๆ ตัวอักษรตัวโตๆ **ถ้าอาจารย์อ่านลายมือคุณไม่ออก อาจารย์จะไม่ให้คะแนน**
5. กรุณาปิดอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิดขณะทำข้อสอบ

ข้อ 1	ข้อ 2	ข้อ 3	ข้อ 4	ข้อ 5	รวม

ข้อ 1

ข้อ 1.1

[10 คะแนน] จงแสดงว่าประพจน์ $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$ เป็น tautology โดยใช้ตารางความจริง

เฉลย

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

ข้อ 1.2

[10 คะแนน] จงแสดงว่าประพจน์ $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ สมมูลทางตรรกศาสตร์กับประพจน์ p โดยไม่ใช้ตารางความจริง

เฉลย

$$
\begin{aligned}
&(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
&\equiv p \wedge [(q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)] \\
&\equiv p \wedge \big[\big(q \wedge (r \vee \neg r)\big) \vee \big(\neg q \wedge (r \vee \neg r)\big)\big] \\
&\equiv p \wedge [(q \wedge T) \vee (\neg q \wedge T)] \\
&\equiv p \wedge (q \vee \neg q) \\
&\equiv p \wedge T \\
&\equiv p
\end{aligned}
$$

ข้อ 2

ให้ L(x,y) แทนประพจน์เปิด “x รัก y” และให้ O(x,y) แทนประพจน์เปิด “x เป็นลูกของ y” และให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของคนในโลก จงเขียนประพจน์เหล่านี้ด้วยสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์

ข้อ 2.1

[4 คะแนน] ทุกคนรักลูกของตนเอง

$$\forall x\, \forall y\, [O(x,y) \longrightarrow L(y,x)]$$

ข้อ 2.2

[4 คะแนน] A รักลูกของเขาทุกคน ยกเว้น B

$$\forall x\, [O(B,A) \wedge \neg L(A,B) \wedge [(O(x,A) \wedge (x \neq B)) \longrightarrow L(A,x)]]$$

ข้อ 2.3

[4 คะแนน] ทุกคนรักคนอย่างน้อยหนึ่งคนที่ไม่ใช่ลูกของเขา

$$\forall x \exists y\, [L(x,y) \wedge \neg O(y,x)]$$

ข้อ 2.4

[4 คะแนน] A มีลูกสามคน

$$\exists x \exists y \exists z\, [(x \neq y) \wedge (y \neq z) \wedge (z \neq x) \wedge O(x,A) \wedge O(y,A) \wedge O(z,A)]$$

ข้อ 2.5

[4 คะแนน] ทุกคนรักพี่น้องของตนเอง

$$\forall x \forall y\, [[\exists z(O(x,z) \wedge O(y,z)] \wedge (x \neq y) \longrightarrow L(x,y)]$$

ข้อ 3

ข้อ 3.1

[10 คะแนน] จงแสดงว่า $A \cup B \cup C = (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \cup (A \cap B \cap C)$

(ห้ามใช้แผนภาพเวนน์)

เฉลย

$$
\begin{aligned}
&(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \cup (A \cap B \cap C) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap C) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup [C \cap [\overline{A} \cup (A \cap B)] \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup \left[C \cap [(\overline{A} \cup A) \cap (\overline{A} \cup B)]\right] \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup \left[C \cap [\mathcal{U} \cap (\overline{A} \cup B)]\right] \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A}) \cup (C \cap B) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup [(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap B)] \cup (C \cap \overline{A}) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup [B \cap (\overline{C} \cup C)] \cup (C \cap \overline{A}) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \mathcal{U}) \cup (C \cap \overline{A}) \\
&= [(A \cap \overline{B}) \cup B] \cup (C \cap \overline{A}) \\
&= [(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)] \cup (C \cap \overline{A}) \\
&= [(A \cup B) \cap \mathcal{U}] \cup (C \cap \overline{A}) \\
&= A \cup B \cup (C \cap \overline{A}) \\
&= [A \cup (C \cap \overline{A})] \cup B \\
&= [(A \cup C) \cap (A \cup \overline{A})] \cup B \\
&= [(A \cup C) \cap \mathcal{U}] \cup B \\
&= (A \cup C) \cup B \\
&= A \cup B \cup C
\end{aligned}
$$

ข้อ 3.2

[10 คะแนน] จงแสดงว่าถ้า $A \subseteq C$ และ $B \subseteq D$ แล้ว $A \times B \subseteq C \times D$

เฉลย

จากโจทย์ให้ $A \subseteq C$ แสดงว่าสำหรับ x ทุก ๆ ค่า ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in C$ ด้วย

และจากโจทย์ให้ $B \subseteq D$ แสดงว่าสำหรับ x ทุก ๆ ค่า ถ้า $x \in B$ แล้ว $x \in D$ ด้วย

ต้องการแสดงว่า $A \times B \subseteq C \times D$ คือการแสดงว่าประพจน์ "สำหรับคู่ลำดับ (a,b) ทุกคู่ ถ้า $(a,b) \in A \times B$ แล้ว $(a,b) \in C \times D$ ด้วย"

สมมติให้ $(a,b) \in A \times B$ นั่นคือ $(a \in A) \wedge (b \in B)$ เป็นจริง

จากนิยามของสับเซตที่โจทย์ให้เป็นจริงข้างต้นจะได้ว่า $(a \in C) \wedge (b \in D)$ ด้วย ดังนั้น $(a,b) \in C \times D$

นั่นคือ $A \times B \subseteq C \times D$ เป็นจริง

ข้อ 4

ให้ $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ นิยามความสัมพันธ์ R บนเซต A ดังต่อไปนี้:

(a,b) R (c,d) ก็ต่อเมื่อ a+d = b+c

ข้อ 4.1

[6 คะแนน] จงแสดงว่า R มีสมบัติสะท้อน

เฉลย

ให้ $(a,b) \in A$ เนื่องจาก a+b = b+a จากนิยามของความสัมพันธ์ R ตามโจทย์ ดังนั้น $(a,b)R(a,b)$ ฉะนั้น R มีสมบัติสะท้อน

ข้อ 4.2

[6 คะแนน] จงแสดงว่า R มีสมบัติสมมาตร

เฉลย

ถ้า $(a,b)R(c,d)$ แล้วได้ว่า $a+d=b+c$ ฉะนั้น $c+b=d+a$ หรือ $(c,d)R(a,b)$ ดังนั้นสรุปได้ว่า R มีสมบัติสมมาตร

ข้อ 4.3

[6 คะแนน] จงแสดงว่า R มีสมบัติถ่ายทอด

เฉลย

ถ้า $(a,b)R(c,d)$ และ $(c,d)R(e,f)$ แล้วได้ว่า

$a+d=b+c$ ให้เป็นสมการที่ 1

และ $c+f=d+e$ ให้เป็นสมการที่ 2

แทนค่า c จากสมการที่ 2 ลงในสมการที่ 1

ได้ $a+d=b+d+e-f$

ดังนั้น $a+f=b+e$

นั่นคือ $(a,b)R(e,f)$

ฉะนั้นสรุปได้ว่า R มีสมบัติถ่ายทอด

ข้อ 4.4

[2 คะแนน] คลาสสมมูล (equivalence class) ของ R คืออะไร? พยายามอธิบายให้ง่ายที่สุดเท่าที่จะทำได้

เฉลย

เราสามารถเขียนข้อความ $a+d=b+c$ ได้อีกแบบหนึ่งว่า $a-b=c-d$ ด้วยเหตุนี้ equivalence class ของ R คือเซตของคู่ลำดับ (a,b) ที่มีผลต่าง $a-b$ เท่ากัน

ให้ c เป็นจำนวนเต็มใดๆ เราได้ว่ามี equivalence class ของ R อยู่ 1 เซตที่ผลต่าง $a-b=c$ พอดี ดังนั้นเราอาจกล่าวคือได้ว่า equivalence class ของ R คือจำนวนเต็มหนึ่งตัวนั่นเอง

ข้อ 5

ข้อ 5.1

[6 คะแนน] จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และไม่ใช่ฟังก์ชันทั่วถึง

เฉลย

จาก $f(0) = f(-2) = 1$ แต่ $0 \neq -2$ ดังนั้น $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เนื่องจาก $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$ ดังนั้นไม่มี x ใดๆ ที่ทำให้ $f(x) = -1$ ดังนั้น f ไม่ใช่ฟังก์ชันทั่วถึง

ข้อ 5.2

[6 คะแนน] กำหนด $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

จงหา f^{-1}

เฉลย

ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $y = f(x)$ เราจะมีกรณีที่ต้องพิจารณาสองกรณีคือ

1. $x \geq 0$ เราจะได้ว่า $y \geq 0$ ด้วย และ $y = x^2$ ดังนั้น $x = \sqrt{y}$

2. $x < 0$ เราจะได้ว่า $y < 0$ ด้วย และ $y = -x^2$ ดังนั้น $x = -\sqrt{-y}$

ฟังก์ชันผันกลับของ $f(x)$ คือ

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

ข้อ 5.3

[8 คะแนน] จงแสดงว่าเซต $A = \{x \mid x = 2k + 1 \text{ โดยที่ } k \in \mathbb{N}\}$ และเซต $B = \{x \mid x = 5k + 7 \text{ โดยที่ } k \in \mathbb{N}\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

เฉลย

กำหนด $f: A \to B$ ดังต่อไปนี้ $f(x) = 5\left(\frac{x-1}{2}\right) + 7 = 2.5x + 4.5$

เราจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

อันดับแรกเราจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

สมมติว่ามี x_1, x_2 ที่ทำให้ $f(x_1) = f(x_2)$

ซึ่งหมายความว่า $2.5x_1 + 4.5 = 2.5x_2 + 4.5$ ซึ่งหมายความว่า $2.5x_1 = 2.5x_2$ ซึ่งหมายความว่า $x_1 = x_2$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ต่อไปเราจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ให้ x เป็นสมาชิกใดๆ ของ B แสดงว่ามีจำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้ $x = 5k + 7$

เราได้ว่า $2k + 1 \in A$ และ $f(2k + 1) = 2.5(2k + 1) + 4.5 = 5k + 2.5 + 4.5 = 5k + 7 = x$

ฉะนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง A จึงมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ B