ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

418531: โครงสร้างข้อมูลและการวิเคราะห์อัลกอริทึม

ภาคต้น 2552

วันที่ 23 มิถุนายน 2553 เวลา 18.00 น. – 20.00 น.

ข้อสอบย่อยครั้งที่ 1

ชื่อ ________________________________ รหัส _________________

1. ข้อสอบนี้มีทั้งหมด 10 หน้า
2. เวลาทำข้อสอบ**สองชั่วโมง**
3. ข้อสอบนี้อนุญาตให้เปิดหนังสือและชีทได้
4. เขียนคำตอบลายมือสวยๆ ตัวอักษรตัวโตๆ **ถ้าอาจารย์อ่านลายมือคุณไม่ออก อาจารย์จะไม่ให้คะแนน**
5. กรุณาปิดอุปกรณ์สื่อสารทุกชนิดขณะทำข้อสอบ

ข้อ 1	**ข้อ 2**	**ข้อ 3**	**ข้อ 4**	**ข้อ 5**	**รวม**

ข้อ 1

ข้อ 1.1

[10 คะแนน] จงแสดงว่าประพจน์ $p \rightarrow q$ สมมูลทางตรรกศาสตร์กับประพจน์ $\neg p \vee q$ โดยใช้ตารางความจริง

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

ข้อ 1.2

[10 คะแนน] จงแสดงว่าประพจน์ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg r \wedge p$ เป็นข้อขัดแย้ง (contradiction) โดยไม่ใช้ตารางความจริง

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg r \wedge p$$
$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge \neg r \wedge p$$
$$\equiv [(\neg p \vee q) \wedge p] \wedge [(\neg q \vee r)] \wedge \neg r]$$
$$\equiv [(\neg p \wedge p) \vee (p \wedge q)] \wedge [(\neg q \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg r)]$$
$$\equiv [F \vee (p \wedge q)] \wedge [(\neg q \wedge \neg r) \wedge F]$$
$$\equiv p \wedge q \wedge \neg q \wedge \neg r$$
$$\equiv p \wedge F \wedge \neg r$$
$$\equiv F$$

ข้อ 2

ให้ D(x,y) แทนประพจน์เปิด "x หาร y ลงตัว" และ P(x) แทนประพจน์เปิด "x เป็นจำนวนเฉพาะ" และให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนเต็มบวก จงเขียนประพจน์ต่อไปนี้เป็นประโยคสัญลักษณ์

ข้อ 2.1

[4 คะแนน] มีจำนวนเต็มบวกอยู่อย่างน้อยหนึ่งตัวที่หารจำนวนเต็มบวกทุกตัวลงตัว

$$\exists x \forall y [D(x, y)]$$

ข้อ 2.2

[4 คะแนน] สำหรับจำนวนเต็มบวก x ใดๆ x จะเป็นจำนวนเฉพาะ **ก็ต่อเมื่อ** จำนวนเต็มบวกที่หารมันลงตัวคือ 1 กับตัวมันเองเท่านั้น

$$\forall x [P(x) \leftrightarrow \forall y [D(y, x) \rightarrow (y = 1) \vee (y = x)]]$$

ข้อ 2.3

[4 คะแนน] สำหรับจำนวนเต็มบวก x ทุกตัว มีจำนวนเฉพาะอย่างน้อยหนึ่งตัวที่หารมันลงตัว

$$\forall x \exists y [P(y) \wedge D(y, x)]$$

ข้อ 2.4

[4 คะแนน] 2 เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่าน้อยที่สุด

$$P(2) \wedge \forall x [P(x) \rightarrow (x \geq 2)]$$

ข้อ 2.5

[4 คะแนน] มีจำนวนเฉพาะเพียงสองตัวเท่านั้นที่หาร 15 ลงตัว

$$\exists x \exists y [D(x, 15) \wedge D(y, 15) \wedge (x \neq y) \wedge P(x) \wedge P(y) \\ \wedge \forall z [P(z) \wedge D(z, 15) \rightarrow (z = x) \vee (z = y)]]$$

ข้อ 3

ข้อ 3.1

[10 คะแนน] จงแสดงว่า $(A - B) \cap (B - C) \cap (C - A) = \emptyset$

(ห้ามใช้แผนภาพเวนน์)

$$
\begin{aligned}
&(A - B) \cap (B - C) \cap (C - A) \\
&= A \cap \overline{B} \cap B \cap \overline{C} \cap C \cap \overline{A} \\
&= A \cap \overline{A} \cap B \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{C} \\
&= \emptyset \cap \emptyset \cap \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

ข้อ 3.2

[10 คะแนน] จงแสดงว่าถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

$$
\begin{aligned}
& A \subseteq B \\
& \equiv \forall x[x \in A \rightarrow x \in B] \\
& \equiv \forall x[x \notin B \rightarrow x \notin A] \\
& \equiv \forall x[x \in \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A}] \\
& \equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $A \subseteq B \equiv \overline{B} \subseteq \overline{A}$ หมายความว่า $A \subseteq B \leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$ เป็น tautology ดังนั้น $A \subseteq B \rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$ ต้องเป็น tautology ด้วย

ข้อ 4

กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง จงเขียนวงกลมล้อมรอบสมบัติที่มีความสัมพันธ์ข้างล่างต่อไปนี้มี

ข้อ 4.1

[4 คะแนน] $\{(x, y) \mid x^2 = y^2\}$

สะท้อน สมมาตร ปฏิสมมาตร *ถ่ายทอด*

ข้อ 4.2

[4 คะแนน] $\{(x, y) \mid |x| < |y|\}$

สะท้อน สมมาตร ปฏิสมมาตร ถ่ายทอด

ข้อ 4.3

[4 คะแนน] $\{(x, y) \mid x^{101} = y^{101}\}$

สะท้อน สมมาตร ปฏิสมมาตร ถ่ายทอด

ข้อ 4.4

[4 คะแนน] $\{(x, y) \mid (x - y)^3 \geq 0\}$

สะท้อน สมมาตร ปฏิสมมาตร ถ่ายทอด

ข้อ 4.5

[4 คะแนน] $\{(x, y) \mid xy = 1\}$

สะท้อน สมมาตร ปฏิสมมาตร ถ่ายทอด

ข้อ 5

ข้อ 5.1

[6 คะแนน] จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และเป็นฟังก์ชันทั่วถึง

(เช็คหนึ่งต่อหนึ่ง) สมมติให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ f(x) = f(y) เราได้ว่า

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 = (y+1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = f(y)$$

เนื่องจาก $(x+1)^3 = (y+1)^3$ เราสามารถสรุปได้ว่า $x + 1 = y + 1$ และ $x = y$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(เช็คทั่วถึง) ให้ y เป็นจำนวนจริงใดๆ เลือก $x = \sqrt[3]{y} - 1$ เราจะได้ว่า

$$f(x) = ((\sqrt[3]{y} - 1) + 1)^3 = \left(\sqrt[3]{y}\right)^3 = y$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ข้อ 5.2

[4 คะแนน] จงหา f^{-1} ของฟังก์ชันในข้อ 5.1

สมมติให้ f(x) = y เราได้ว่า $(x+1)^3 = y$ ดังนั้น $f^{-1}(y) = x = \sqrt[3]{y} - 1$

ฉะนั้นอินเวอร์สของ f คือ $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} - 1$

ข้อ 5.3

[10 คะแนน] กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่ จงแสดงว่า $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ กับ $A \times A$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

จากในชั้นเรียน เราทราบว่า $\mathbb{N}$ กับ A มีจำนวนสมาชิกเท่ากันเนื่องจากฟังก์ชัน f(x) = 2x เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงจาก $\mathbb{N}$ ไปยัง A

นิยามฟังก์ชัน $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times A$ โดยที่ g((x,y)) = (f(x), f(y)) เราจะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งละทั่วถึงดังต่อไปนี้

(เช็คหนึ่งต่อหนึ่ง) สมมติให้ (a,b) และ (c,d) เป็นคู่ลำดับที่ทำให้ g((a,b)) = g((c,d)) หมายความว่า (f(a),f(b)) = (f(c),f(d)) นั่นคือ f(a) = f(c) และ f(b) = f(d) เราจึงได้ว่า a = c และ b = d ด้วย ดังนั้น (a,b) = (c,d)

(เช็คทั่วถึง) ให้ (x,y) เป็นคู่ลำดับใดๆ ใน $A \times A$ เราได้ว่า $(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$ เป็นคู่ลำดับใน $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ และ $g\left(\left(f^{-1}(x), f^{-1}(y)\right)\right) = (f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) = (x, y)$ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันทั่งถึง